

# 面外せん断荷重が作用する異方性楕円筒の解析および応力拡大係数の計算 種 健・佐々木 徹\*・内田 武

## Analysis for Anisotropic Elastic Hollow Cylinder Subjected to Out-of-Plane Shear Loadings and Computation Examples of Stress Intensity Factors (SIFs)

Takeshi TANE, Toru SASAKI and Takeshi UCHIDA

### Abstract

Since used amount of anisotropic materials such as CFRP is increased year by year in aerospace, automobile, and other industry fields, analysis for an anisotropic elastic medium is important, and many researchers are shown several solutions for these problems. For example, stress intensity factors (SIFs) on crack tip for fracture mode I and II are derived through using two-dimensional elastic theory for anisotropic body, however, few SIF calculations exist for fracture mode III. Particularly, no one is seemed to obtain SIF for fracture mode III of hollow elliptical cylinder. Then, SIF for fracture mode III, as an analytical solution for anisotropic elliptic cylinder with a single crack subjected to out-of-plane shear loadings, are presented in this paper. A solution for elliptical hollow cylinder, which is subjected to out-of-plane loadings on its both elliptical surfaces is already presented, and since the formulae of SIF for mode III are also derived already, these solutions are combined to cleared the purposes.

*Keywords : Anisotropy, Elasticity, Elliptical Hollow Cylinder, Crack, Stress Intensity Factor, Two-dimensional Elastic Theory*

### 1. 緒言

航空宇宙, 自動車, またその他様々な産業分野において適用の拡大が続いている CFRP 等の複合材料は, 積層の方法によっては力学的異方性を示す。また, 典型的な異方性材料である木材は, 温かみを感じる素材の特性から建築用材料や構造用材料として, その活用範囲が広がりを見せている。

このような背景から, 異方性材料を対象とした応力・変位解析が実施されている<sup>(1)</sup>。とくに, 二次元弾性理論に基づく手法においては, 材料中の亀裂先端の応力拡大係数を評価する論文が多数発表されている。

例えば, 一様荷重の作用する無限板の一亀裂を対象としたものとして, Sihら<sup>(2)-(4)</sup>やShermaら<sup>(5)</sup>の研究が上げられるが, 有限領域を対象に, とくに, 破壊モードIII (面外せん断モード) の応力拡大係数を検討した例は見られない現状にある。

そこで, 本研究では一般的な異方性を示す楕円柱の内部に存在する亀裂を対象として, 破壊モードIIIの応力拡大係数を求めることを目的とする。著者らは面外せん断荷重を側面に受ける楕円筒の解を既に導出し<sup>(6)</sup>, また, 別報においては亀裂を有する円柱に対し, モードIIIの応力拡大係数を求める公式<sup>(7)</sup>を導いている。本論文では, これらの成果を組み合わせ, 計算した応力拡大係数を示す。

### 2. 基礎方程式

#### 2.1 問題設定

図1のように, 楕円柱 $L_1$ の内部に直線亀裂 $L_2$ が存在する異方性材料について, 二次元弾性理論により亀裂先端の破壊モードIIIの応力拡大係数を示すことを主目的とする。

はじめに,  $L_1$ の長短軸をそれぞれ $a, b$ とし, これらの方向に  $x-y$ 座標系を設け, 紙面手前方向を $z$ 軸とする。つぎに,  $L_2$ は原点 $O$ を中心として $x$ 軸上に存在すると仮定し, その長さを $2c$ とする。 $L_1$ および $L_2$ には,  $z$ 軸方向の面外せん断荷重が作用し, これらを記号 $P_z^j$  ( $j = 1, 2$ )で表す。

材料の構成方程式には, 平面ひずみの取り扱いを考慮した

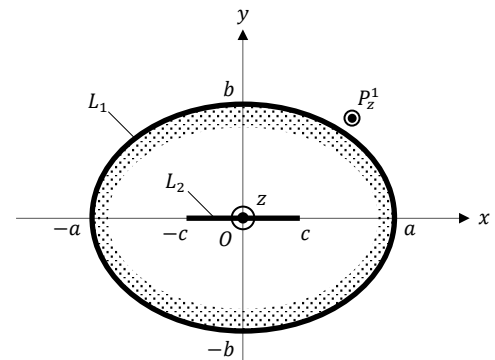


図1 解析モデル

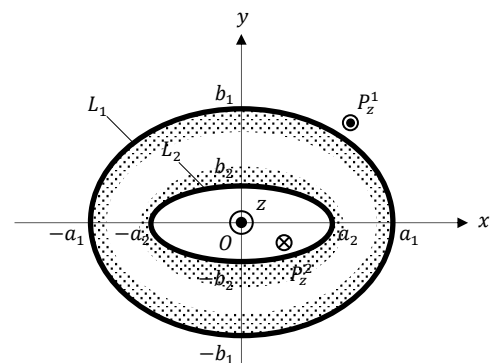


図2 楕円筒モデル

次式を採用する。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

ここに,  $a_{ij}$ は弾性コンプライアンスである。

\* 長岡工業高等専門学校機械工学科

## 2.2 楕円筒の複素応力関数

図2に示す, 面外せん断荷重が作用する楕円筒に対し,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ ,  $a_2 = c$  および  $b_2 = 0$  の条件を考慮すると, 図1を取り扱うことが可能である.

図2の複素応力関数  $\phi_k(\zeta_k)$  は前報<sup>(6)</sup>で既に導いており, 2つの基本問題 (図3 ( $j=1$ ) および図4 ( $j=2$ )) の複素応力関数  $\phi_{kj}(\zeta_{kj})$  を用いて次式のように表すことができる.

$$\phi_k(\zeta_k) = \sum_{j=1}^2 \phi_{kj}(\zeta_{kj}). \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{k1}(\zeta_{k1}) &= \Gamma_{k0,1} + \Gamma_{k1,1} z_k + \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_{kn,1} P_{kn}(\zeta_{k1}), \\ P_{kn}(\zeta_{k1}) &= \left\{ \zeta_{k1}^n + \left( \frac{m_{kj}}{\zeta_{k1}} \right)^n \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\phi_{k2}(\zeta_{k2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma_{kn,2}}{\zeta_{k2}^n}. \quad (4)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} z_k &= x + \mu_k y = R_{kj} \left( \zeta_{kj} + \frac{m_{kj}}{\zeta_{kj}} \right), \\ R_{kj} &= \frac{a_j - i\mu_k b_j}{2}, \quad m_{kj} = \frac{a_j + i\mu_k b_j}{a_j - i\mu_k b_j}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$\zeta_{kj}$  は境界  $L_j$  を単位円に変換する写像変数である.  $\Gamma_{kn,j}$  は複素定数で, 図3および図4に拘束解除法を適用して決定する.

図2と図3を比較すると, 図3の  $L_2$  における無負荷の境界条件を満足させるため, 逆向きの力を図4の  $L_2$  に作用させて打ち消し, 同様の操作を一定回数繰り返すものである.

## 2.3 合力, 応力, 変位および応力拡大係数を求める公式

図1の合力, 応力, 変位は, 図2および式(5)において,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ ,  $a_2 = c$  および  $b_2 = 0$  の条件を考慮して, 次式によって求めることができる.

$$\left. \begin{aligned} \pm P_x &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k(\zeta_k), \\ \pm P_y &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k(\zeta_k), \\ \pm P_z &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k(\zeta_k), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \phi_k^1(\zeta_k), \\ \sigma_y &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k^1(\zeta_k), \\ \tau_{yz} &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k^1(\zeta_k), \\ \tau_{xz} &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \lambda_k \phi_k^1(\zeta_k), \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k^1(\zeta_k), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k p_k \phi_k(\zeta_k), \\ v &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \phi_k(\zeta_k), \\ w &= 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \phi_k(\zeta_k). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また, 図2の亀裂右側先端における破壊モードIIIの応力拡大係数は, 次式によって決定することができる.

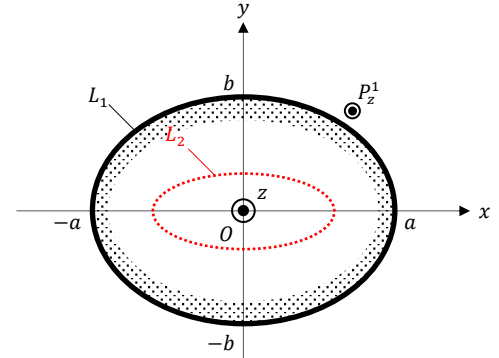


図3 楕円柱モデル

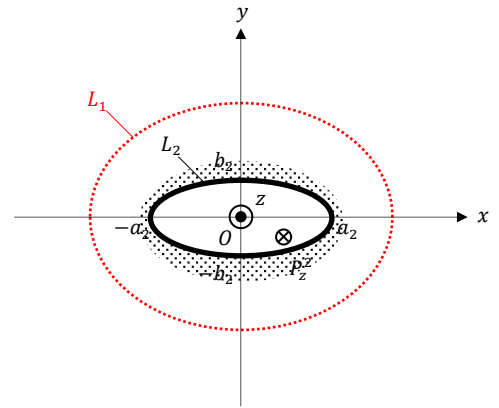


図4 有孔無限板モデル

$$K_{III} = -2\sqrt{\frac{\pi}{c}} \text{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{kn,2}. \quad (9)$$

## 3. 数値計算例

直交異方性弾性材料として, 以下の縦弾性係数比およびポアソン比を有する材料について検討を行う.

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} &= 0.200, & \frac{E_3}{E_1} &= 1.000, \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{32} &= 0.25. \end{aligned} \right\}$$

横弾性係数は, 次式で評価されるものと仮定する.

$$\frac{1}{G_{ij}} = \frac{1}{E_i} + \frac{1}{E_j} + \frac{1}{2E_i}.$$

弾性主軸と図2に示す座標軸との関係については,

$$E_1 = E_x, \quad E_2 = E_y, \quad E_3 = E_z.$$

を基準に,  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸に関する弾性主軸の回転角を,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  として, これら傾斜角度の影響の検討も行う.

### 3.1 上下に面外せん断力 $S$ を受ける場合

図5のように, 楕円柱  $L_1$  の上下に面外せん断力  $S$  が作用する場合,  $0 \leq |\theta| \leq \pi/2$  で  $-P_z^1 = 0$ ,  $\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$  で  $-P_z^1 = S$  となるから, これを周期  $2\pi$  の複素フーリエ級数:

$$-P_z^1 = \gamma_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^1 e^{in\theta} + \bar{\gamma}_n^1 e^{-in\theta}). \quad (10)$$

でこれを表示したときのフーリエ係数は次式で決定される.

$$\gamma_0^1 = \frac{S}{2}, \quad \gamma_n^1 = -\frac{S}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}. \quad (11)$$

このフーリエ係数を用いて、式(3)の複素定数を決定することができる。

表1および表2は、亀裂の存在する円柱について、破壊モードIIIの応力拡大係数を計算したものである。  $a = b = R = 25 \text{ mm}$ ,  $2c = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0 \text{ mm}$  としている (図5)。また、弾性主軸の回転角を、 $\alpha = \beta = \gamma = 0^\circ$ を基準に、いずれかを回転させて表にまとめた。

表1 応力拡大係数 $K_{III}$ の計算例 ( $\times 10^{-2} \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ )  
( $E_1$ および $E_2$ をz軸まわりに回転)

$c/R$	$\gamma = 0^\circ$	$\gamma = 30^\circ$	$\gamma = 60^\circ$	$\gamma = 90^\circ$
0.01	1.881	1.832	2.273	3.469
0.02	2.661	2.591	3.215	4.904
0.04	3.764	3.667	4.551	6.926
0.08	5.332	5.199	6.458	9.743
0.16	7.590	7.430	9.252	13.51

表2 応力拡大係数の計算例 ( $\times 10^{-2} \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ )  
( $E_2$ および $E_3$ をx軸まわりに回転)

$c/R$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 45^\circ$		$\alpha = 90^\circ$
	$K_{III}$	$K_I$	$K_{III}$	$K_{III}$
0.01	1.881	0.189	1.951	2.125
0.02	2.661	0.268	2.760	3.005
0.04	3.764	0.378	3.904	4.250
0.08	5.332	0.531	5.528	6.014
0.16	7.590	0.731	7.859	8.526

表1は、弾性主軸 $E_1$ および $E_2$ がz軸まわりに角度 $\gamma$ 回転した際の応力拡大係数の変化を示す。 $\gamma = 0^\circ$ では $E_x = E_1, E_y = E_2$ より、y軸方向の縦弾性係数がx軸方向の1/5の例であり、 $\gamma = 90^\circ$ では、大小関係が逆転している。

表1から、 $E_1 > E_2$ の際は、回転角 $\gamma$ が大きくなるにつれ、応力拡大係数も大きくなるのが分かった。 $\gamma = 0^\circ$ および $\gamma = 90^\circ$ では、どの $c/R$ においても約1.8倍の値となっている。

表2は、弾性主軸 $E_2$ および $E_3$ がx軸まわりに角度 $\alpha$ 回転した際の応力拡大係数の変化を示す。 $\alpha = 0^\circ$ は表1の $\gamma = 0^\circ$ と同じデータである。 $\alpha = 90^\circ$ では、 $E_y = E_3, E_z = E_2$ , かつ、 $E_3/E_1 = 1.000$ より、横等方性の計算結果を表す。

横等方性の場合、直交異方性 $\alpha = 0^\circ$ の場合より応力拡大係数が大きくなっている。ただし、表1の直交異方性 $\gamma = 90^\circ$ が相対的にはy軸方向の縦弾性係数が大きいので、これよりは小さな応力拡大係数となっている。

また、 $\alpha = 45^\circ$ など、 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ においては、式(1)の構成方程式の影響を受けて、破壊モードIの応力拡大係数が連成することを表している。そのオーダーは、破壊モードIIIの応力拡大係数の10%弱である。

### 3.2 亀裂に一樣な面外せん断応力 $\tau$ を受ける場合

図6のように、亀裂  $L_2$  に面外せん断力  $\tau$  が作用する場合、境界の合力  $P_2^2 = \tau c \cos \theta = \tau c(e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$  である。先と同様に、周期  $2\pi$  の複素フーリエ級数：

$$P_2^2 = \gamma_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2 e^{in\theta} + \bar{\gamma}_n^2 e^{-in\theta}). \quad (12)$$

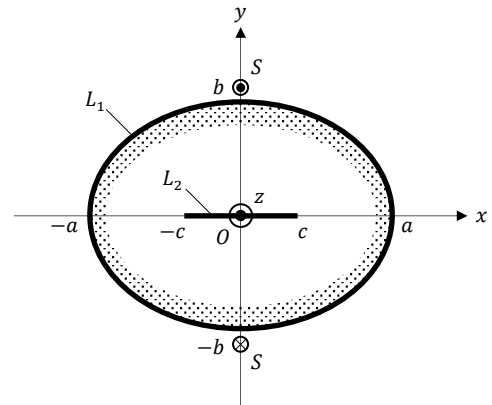


図5 上下に面外せん断力  $S$  を受ける場合

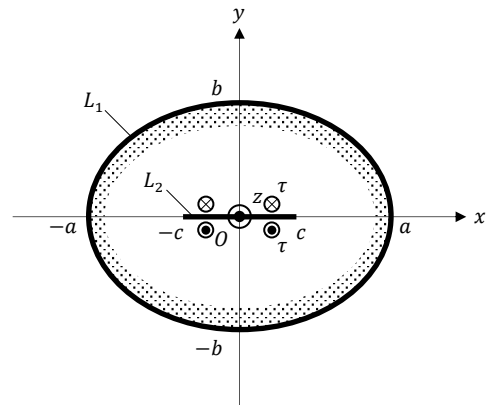


図6 亀裂に一樣な面外せん断応力  $\tau$  を受ける場合

で表したとすると、フーリエ係数は次式で決定される。

$$\gamma_1^2 = \frac{\tau c}{2}, \quad \gamma_n^2 = 0 \quad (n \neq 1). \quad (13)$$

このフーリエ係数を用い、式(4)の複素定数を決定する。

図7は、 $\tau = 1.0 \text{ MPa}$ で亀裂長 $2c = 2 \text{ mm}$ を有する円柱の半径 $R$ を変化させ、破壊モードIIIの応力拡大係数を計算したものである。

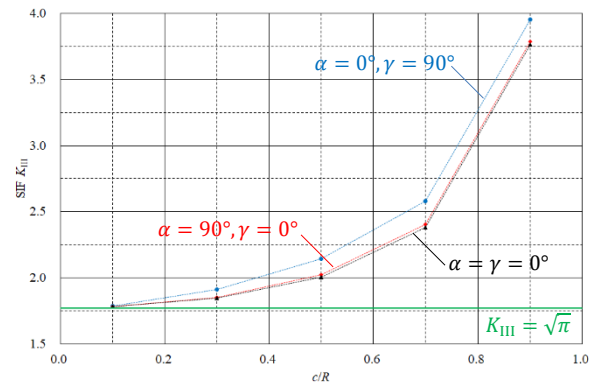


図7 円柱内の亀裂に一樣な面外せん断応力が作用する場合の応力拡大係数 ( $\beta = 0$ )

横軸 $c/R$ が小さいほど、円柱の半径が大きいことを表し、よく知られた、無限板中に存在する1亀裂の応力拡大係数 $K_{III} =$

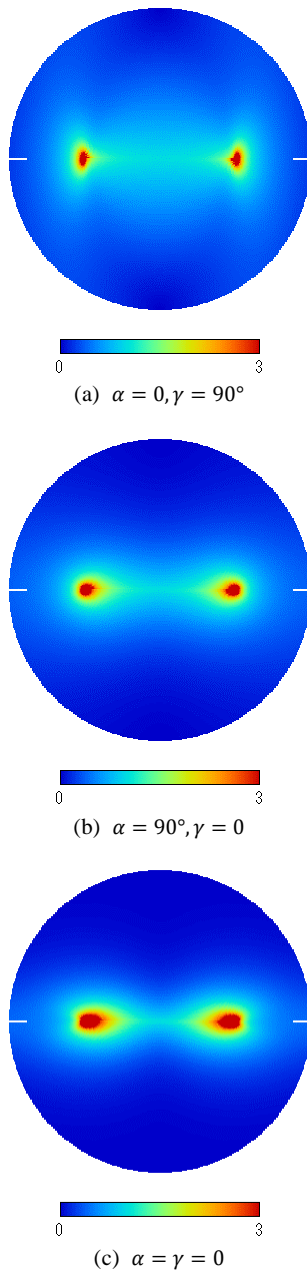


図8 最大せん断応力分布図

$\tau\sqrt{\pi c} = \sqrt{\pi}$ に漸近している。

図8は、図7の $c/R = 0.5$ における最大せん断応力の分布を示している。弾性主軸の傾斜は図に示すとおりである。これらの

図は、亀裂両端において理論上無限大となる最大せん断応力を生じることが示すが、 $x$ 軸方向の縦弾性係数の大きな方向、例えば、(c)では水平方向に大きく分布していることを示している。

このように、本論文の成果を用いると、応力拡大係数のみならず、応力や変位の分布を求めることができる。

## 5. 結言

本報では、面外せん断荷重が作用する、亀裂を有する楕円板の応力拡大係数を導き、具体的な数値計算例を示した。応力拡大係数の値は材料異方性の影響を受けて変化することを確認した。

また、円柱内に存在する亀裂に一樣な面外せん断応力が作用する場合、亀裂寸法を固定し、円柱半径を大きくすると、これまでに導かれた無限板中に1亀裂が存在し、無限遠において一樣な面外せん断応力が作用する場合の解に帰着することを確認した。

これは、応力拡大係数の定義からも妥当な結果であり、無限板では材料異方性の影響を受けないことを示したSihらの成果<sup>(4)</sup>と同様の結果となった。

## 参考文献

- (1) 例えば, Lekhnitskii, S. G., Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, San Francisco, Holden-Day (1963).
- (2) Sih, G. C., Paris, G. C. and Erdogan, F., Crack tip stress intensity factors for plane extension and plate bending problems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 29, No. 2 (1962), pp. 306-312.
- (3) Sih, G. C., Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, No.1 (1965), pp. 51-58.
- (4) Sih, G. C., Paris, G. C. and Irwin, G. R., On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, International Journal of Fracture Mechanics, No. 1 (1965), pp. 189-203.
- (5) Sherma, D. S. and Dave, J. M., Stress intensity factor for hypocycloidal hole with cusps in infinite anisotropic plate, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, No. 75 (2015), pp. 44-52.
- (6) 種健, 内田武, 佐々木徹, 浜野浩幹, 面外せん断荷重を側面に受ける異方性だ円筒の解析, 北九州工業高等専門学校研究報告, Vol. 49, pp. 1-6, 2016.
- (7) 種健, 内田武, 佐々木徹, 浜野浩幹, 面外せん断荷重を側面に受ける異方性だ円筒の解析, 北九州工業高等専門学校研究報告, Vol. 49, pp. 1-6, 2016.

(2020年11月 4日 受理)