面外せん断荷重を側面に受ける異方性だ円筒の解析

種　　健・内田　　武・佐々木　徹*・浜野　浩幹**

Analysis for Anisotropic Tube Subjected Arbitrary Antiplane-Loadings on Lateral Surface

Takeshi TANE, Takeshi UCHIDA, Toru SASAKI and Hiroki HAMANO

Abstract

This paper presents analytical solution for anisotropic tube which is subjected to several anti-plane shear loadings along both sides. These external loadings on the cylindrical surface are expanded to complex form of Fourier series with period 2π. It is supposed that these loadings are not changed in the direction of a generator. Authors are already discussed for the case of the hollow cylinder is subjected any in-plane loadings. A characteristic of this study is to introduce convergence calculation so-called “constraint release technique”. Analyses are carried out using theory of two-dimensional elasticity, since general solutions are derived from complex stress functions that were shown by S. G. Lekhnitskii. Some example calculations are shown diagrammatically.

Keywords : Anisotropy, Tube, Constraint Release Technique, Antiplane loadings

1．緒言

二次元弾性問題の解析解を求める研究においては，複数の境界を持つ多重連結領域の問題の中でも，等方性材料からなる円筒については，複素応力関数の円柱座標形式表示が可能であるため，容易に応力，変位場を決定することができる．したがって，この問題についてはこれまでの弾性学や材料力学等の著書[(1), (2)]でしばしば取り上げられている．

また，同じく等方性を示すだ円筒の問題については，内外の境界が焦点を同じくするだ円からなると仮定した場合のみ，解析解が導かれている．これは，共焦点のだ円群を写像関数により同心円領域へと変換することで，先の円筒問題とほぼ同じように解析が可能であることによる．例えば，川久保ら[(3)]は森口の手法[(2)]を応用して，リングの境界に任意荷重が作用する際の応力，変位の解を導いた．

異方性材料に対する解析は，Lekhnitskiiにより一連の定式化が行われ，彼により円孔もしくはだ円孔を有する無限体に遠方場一様荷重が作用する場合の解[(4), (5)]が求められてから，様々な問題への応用が試みられている．

川久保らは，直交異方性材料を含む二次元異方性（面内問題と面外せん断問題を別々に取り扱うことができる）を示すだ円板の境界に面内の任意荷重が作用する場合の応力，変位挙動を明らかにした[(6)]．また，著者らはこれを一般的な異方性弾について検討した[(7)]．

そして，先に述べた円筒、だ円筒の解についても，二次元異方性を示す材料については，堤らが面内の任意荷重を受ける場合について解を導き，数値計算を行っている[(8)]．また，著者らはこれを一般的な異方性材料へと拡張した解を求め，具体的な計算例を示した[(9)]．これらの研究に共通していえる特徴としては，等方性だ円筒の場合のように，内外の二境界が必ずしも焦点を同じくする必要がないことである．

前報[(9)]で述べたように，異方性を示すだ円筒の場合，例え内外二境界が焦点を同じくするだ円群で構成されていたとしても，等方性の場合のように，同心円領域には変換されない．したがって，問題の解を導くことには困難を伴うため，以下二つの問題：

【1】だ円筒の外側境界を境界に持つ中実だ円柱

【2】だ円筒の内側境界を孔にもつ無限体

の解を用い，だ円筒の解を近似的に求める「拘束解除法」と呼ばれる収束計算手法により，近似的に解を求めている．

なお，等方性のだ円筒，堤らや著者らが求めた異方性のだ円筒の研究では，二境界に作用する荷重が断面内二方向の面内成分に限定されており，母線方向に作用する面外せん断荷重を対象とした研究成果は報告されていない．

そこで本研究では，前報の解を面外せん断荷重に応用し，だ円筒の面外せん断問題に関する応力，変位分布を明らかにする．そして，導かれた解に基づき数値計算を行い，一部特殊な処理を施して既往の解[(10)]との比較を行い，計算の妥当性を確認する．

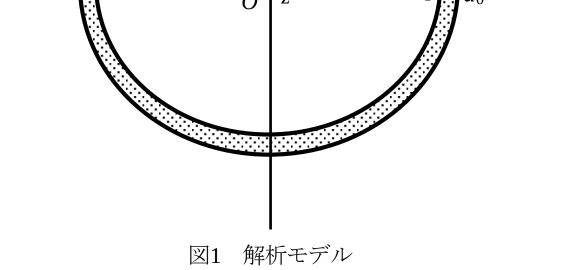


図1　解析モデル

2．解析方法

図1に示すように，一般的な異方性材料からなるだ円筒の断面内，だ円の長軸および短軸の方向にそれぞれx軸，y軸を取り，母線方向をz軸とする直交座標系を考える．

だ円筒の二境界をL_0（長軸a_0，短軸b_0）およびL_1（長軸a_1，

*　長岡工業高等専門学校機械工学科

**　松江工業高等専門学校名誉教授

短軸b_1）で表し，これらの境界はx, y各軸を挟んで線対称の関係にあるとする．そして，これらの二境界にはz軸方向に大きさの変化しない面外せん断荷重Z_0，Z_1が，境界に任意に分布して作用しているものとする．

2.1　写像関数

前報と同様に，図1のだ円境界L_0あるいはL_1をζ_k平面上の単位円に写像する関数を導入する．

$$z_k = x + \mu_k y = \omega_k(\zeta_k) = R_k\left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k}\right). \tag{1}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} R_k &= \frac{a - i\mu_k b}{2}, \\ m_k &= \frac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式(1)は長軸a，短軸bのだ円を単位円に写像する関数であり，L_0（長軸a_0，短軸b_0）およびL_1（長軸a_1，短軸b_1）を式(2)に適用して式(1)に用いることにより，双方の境界を単位円に写像することができる．

なお，μ_kは異方性の程度を表す（弾性コンプライアンスにより定まる）複素定数であり，6次代数方程式の解として決定される（後述）．

一例として，図2に示すようにだ円筒の外側境界L_0，内側境界L_1が，ともに焦点を同じくする場合（$b_0 / a_0 = 0.75, b_1 / b_0 = 0.20$）で，複素定数$\mu_k = 0.3 + 1.2i$で表されるような異方性弾性材料について，アフィン変換後のだ円筒断面を図3のz_k平面（$z_k = x_k + iy_k$）に示す．ここに，$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$（$\alpha_k, \beta_k$ はともに実数で，$\beta_k > 0$）と置いて，$x_k = x + \alpha_k y, y_k = \beta_k y$としている．

等方性弾性材料では，特性根$\mu_k = i$となるために，図3に相当するz_k平面（アフィン変換面）は図2のz平面と同じものになることが分かる．

2次元弾性理論では，後述するように解析を容易にする目的から，z平面上の任意形状の境界Lを，一旦図3に示すz_k平面上にアフィン変換し，この境界をさらに式(1)を用いてζ_k平面上の単位円に写像することが行われる．

図4は，図2に示すだ円筒断面の内側境界L_1が，ζ_k平面上で単位円となるように，式(1)によって変換した結果を示している．このうち，図4(a)が等方性弾性材料（図2のz平面）に対する変換結果，図4(b)が異方性弾性材料（図3のz_k平面）に対する変換結果を示している．

内側境界L_1はともに単位円に写像されており，正しく変換されていることが分かる．続いて，外側境界L_0について，ここでの例のように，2境界が共焦だ円群で構成される場合を見てみる．

まず図4(a)に示す等方性弾性材料では，L_0はζ_k平面上で内側境界L_1の単位円と原点を共有する同心円となる．L_0の円の半径

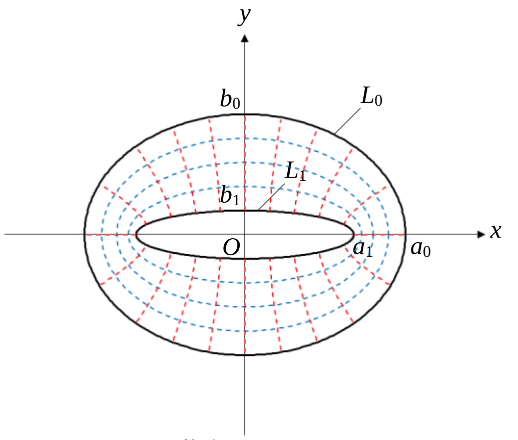


図2　複素平面 $z = x + iy$.

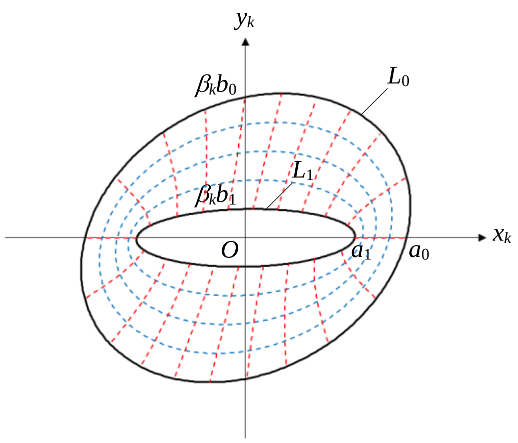
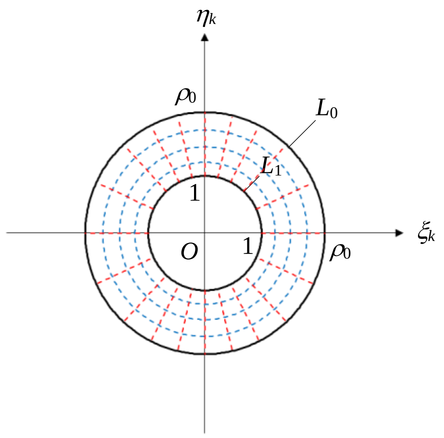
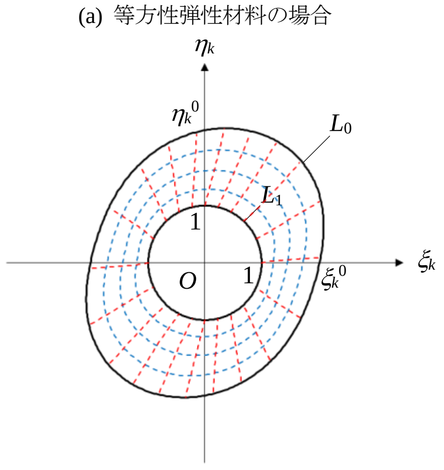


図 3　アフィン変換面 $z_k = x + \mu_k y$.



(a) 等方性弾性材料の場合



(b) 異方性弾性材料の場合

図 4　式(1)による写像の一例

をρ_0とすると，これは次式によって与えられる．

$$\rho_0 = \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1}. \tag{3}$$

図2のx, y軸は図4(a)のξ_k, η_k軸に変換され，原点まわりの回転なく，両軸の直交性が保障される．

次に異方性弾性材料の場合，図4(b)に示されるように両境界は同心円領域に写像されない．同図のξ_k, η_k軸とL_0境界との交点をξ_k^0, η_k^0とするとき，これらは具体的に次式によって求めることができる．

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\xi_k^0} &= \frac{1}{a_2}\left[\left\{-\frac{\mu_k - \bar{\mu}_k}{\mu_k + \bar{\mu}_k}\left(\frac{\mu_k - \bar{\mu}_k}{2} + i\frac{a_2}{b_2}\right) + \frac{\mu_k + \bar{\mu}_k}{2}\right\} b_1 \sin\theta_1 \right. \\ &\qquad \left. + a_1 \cos\theta_1 \right], \\ \frac{1}{\eta_k^0} &= \frac{1}{b_2}\left\{ b_1 \sin\theta_2 + \frac{\mu_k - \bar{\mu}_k}{\mu_k + \bar{\mu}_k}\left(\frac{2}{\mu_k - \bar{\mu}_k} - i\frac{b_2}{a_2}\right) a_1 \cos\theta_2 \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ここに，上付バーは共役複素数を表している．そして，角度θ_i（i = 1, 2）は式(4)を以下の式に代入して得られる超越方程式の解である．

$$\left.\begin{aligned} & b_0 \sin\theta_1 + \frac{i}{2}\frac{\mu_k + \bar{\mu}_k}{\mu_k - \bar{\mu}_k} b_1 \left(\xi_k^0 + \frac{1}{\xi_k^0}\right) = 0, \\ & a_0 \cos\theta_2 + \frac{\mu_k + \bar{\mu}_k}{2} b_0 \sin\theta_2 - \frac{\mu_k + \bar{\mu}_k}{4} b_1 \left(\eta_k^0 + \frac{1}{\eta_k^0}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

等方性弾性材料では，複素フーリエ級数の導入により解析を容易に行えることもあり，だ円筒の2境界が焦点を同じくする場合について，解が求められてきた．しかし，2境界の焦点が異なるとこの方法は利用できず，適用範囲が限定的である．異方性弾性材料の場合は，もはや解析的に解くことは難しい．

そこで，本研究では前報(9)に引き続き拘束解除法と呼ばれる収束計算手法を導入し，2モデルの解析解に基づいて精度よく近似解を求める方法を示すものである．

この方法によれば，だ円筒の2境界が焦点を異にする問題はもとより，複数モデルの解析解を用いることにより，様々な問題へと拡張して解を求めることができるメリットがある．

2.2　合力，応力，変位を求める公式

二次元弾性理論では，複素応力関数$\phi_k(\zeta_k)$を用いて異方性弾性体内の合力，応力，変位を計算する．これらの計算公式を以下に示す．複素応力関数$\phi_k(z_k)$は，対象とする2次元弾性問題の境界条件を考慮して決定されるものである．

<u>合力</u>

$$\left.\begin{aligned} & \pm P_x = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k \phi_k(\zeta_k), \quad \pm P_y = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\phi_k(\zeta_k), \\ & \pm P_z = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k \phi_k(\zeta_k). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ここに左辺の複合は境界の内外を区別するもので，内側境界の場合に正号，外側境界の場合に負号をとるものである．また，λ_kは後で示す複素定数である．

<u>応力</u>

$$\left.\begin{aligned} & \sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k^2 \phi_k^{\mathrm{I}}(\zeta_k), \quad \sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\phi_k^{\mathrm{I}}(\zeta_k), \\ & \tau_{yz} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k \phi_k^{\mathrm{I}}(\zeta_k), \quad \tau_{xz} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k \lambda_k \phi_k^{\mathrm{I}}(\zeta_k), \\ & \tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k \phi_k^{\mathrm{I}}(\zeta_k). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ここに上付文字Iは，複素変数z_kによる微分を表す．複素変数ζ_kによる微分をプライムで表すことにすると，複素応力関数の一回微分は以下のように求まる．

$$\phi_k^{\mathrm{I}}(\zeta_k) = \frac{d\phi_k(\zeta_k)}{dz_k} = \frac{\phi_k'(\zeta_k)}{\omega_k'(\zeta_k)}. \tag{8}$$

本論文のように，だ円境界を単位円に写像する場合には，式(1)より上式は次のように書ける．

$$\phi_k^{\mathrm{I}}(\zeta_k) = \frac{\zeta_k^2}{R_k(\zeta_k^2 - m_k)}\phi_k'(\zeta_k). \tag{9}$$

<u>変位</u>

変位成分は，構成方程式，幾何式を考慮して求めることができ，その結果は以下のようになる．

$$\left.\begin{aligned} & u = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k p_k \phi_k(\zeta_k), \quad v = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} q_k \phi_k(\zeta_k), \\ & w = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k \phi_k(\zeta_k). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ここに，u, vおよびwはx軸，y軸およびz軸方向の変位を表している．　p_k, q_kおよびr_kは以下の複素定数であり，弾性コンプライアンスa_{ij}（後述）を用いて決定される．

$$\left.\begin{aligned} \mu_k p_k &= a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k + \lambda_k(a_{15}\mu_k - a_{14}), \\ \mu_k q_k &= a_{12}\mu_k^2 + a_{22} - a_{26}\mu_k + \lambda_k(a_{25}\mu_k - a_{24}), \\ \mu_k r_k &= a_{14}\mu_k^2 + a_{24} - a_{46}\mu_k + \lambda_k(a_{45}\mu_k - a_{44}). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

複素定数μ_kは以下の6次代数方程式の解として与えられる．

$$l_4(\mu) l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0. \tag{12}$$

ここに，s

$$\left.\begin{aligned} l_2(\mu) &= a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44}, \\ l_3(\mu) &= a_{15}\mu^3 - (a_{14} + a_{56})\mu^2 + (a_{25} + a_{46})\mu - a_{24}, \\ l_4(\mu) &= a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

また，複素定数λ_k は面内問題と面外せん断問題の連成の程度を示すパラメータであり，以下のように決定される．

$$\lambda_k = -\frac{l_3(\mu_k)}{l_2(\mu_k)} = -\frac{l_4(\mu_k)}{l_3(\mu_k)}. \tag{14}$$

式(13)において，a_{ij}は構成方程式を次のように表した際の弾性コンプライアンスである．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ & \mathrm{sym} & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{15}$$

式(15)の特別な場合として，直交異方性弾性材料の弾性コンプライアンスは次式となる．

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}=1/E_x,\ a_{12}=-\nu_{xy}/E_x=-\nu_{yx}/E_y,\ a_{22}=1/E_y,\\ &a_{44}=1/G_{yz},\ a_{55}=1/G_{xz},\ a_{66}=1/G_{xy},\\ &\text{other } a_{ij}=0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ここに，E_iはi軸方向の縦弾性係数，G_{ij}およびν_{ij}はi-j平面内の横弾性係数およびポアソン比である．

３．拘束解除法

前報[9]で詳しく説明していることから数式による説明は省き，ここでは簡単な紹介に留めるが，拘束解除法は問題の解を既に導かれた 2 つもしくは複数の問題の解を利用して近似的に求める収束計算手法の 1 つである．

本研究では図 1 のだ円筒の解を求めるために，既に導かれている問題の解として，図 5(a), (b)に示されただ円柱およびだ円孔を有する無限体の解を用いる．これらの問題の複素応力関数は，それぞれ以下のように与えられる[5], [6]．

だ円柱（図5(a)）に対して

$$\phi_{k1}(\zeta_{k1})=\Gamma_{k0,1}+R_{k1}\Gamma_{k1,1}\left(\zeta_{k1}+\frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\Gamma_{kn,1}\left\{\zeta_{k1}^{n}+\left(\frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}}\right)^{n}\right\}. \tag{17}$$

だ円孔を有する無限体（図5(b)）に対して

$$\phi_{k2}(\zeta_{k2})=\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_{kn,2}\frac{1}{\zeta_{k2}^{n}}. \tag{18}$$

ここに，双方の式に含まれる複素定数$\Gamma_{kn,j}$はだ円柱あるいはだ円孔の境界における力の境界条件により決定される．

図5(a), (b)には，赤色の破線で仮想境界（それぞれ，L_1およびL_0）が示してある．拘束解除法では，これらの仮想境界L_j（j = 0, 1）の合力を式(6)で求め，これを周期2π の複素フーリエ級数に展開することが必要になってくる（図中には，記号Q_x^j, Q_y^jおよびQ_z^jにより，これら仮想境界上の合力を示した）．

拘束解除法の手順を以下に示す．

① だ円柱（図5(a)）のL_0境界に，だ円筒（図1）L_0境界の外力$P_x^0 = P_y^0 = 0, P_z^0 = Z_0$を作用させ，仮想境界$L_1$の合力$Q_x^1$, Q_y^1, Q_z^1を求める．一般的な異方性弾性材料を対象としているため，面外せん断荷重Z_0によってL_1境界には面内の合力成分Q_x^1, Q_y^1も発生する．

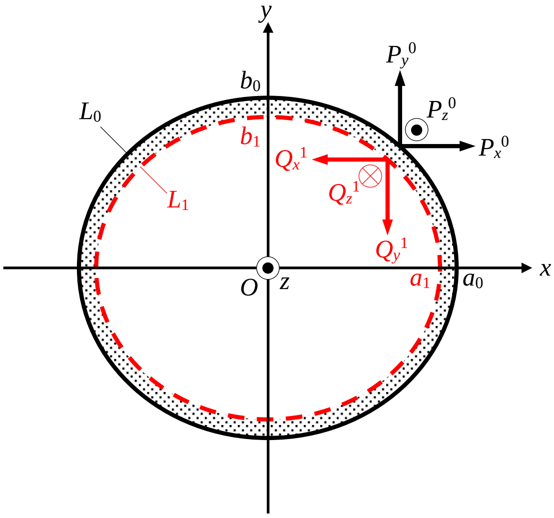
② 無限体（図5(b)）のL_1境界に，だ円筒（図1）L_1境界の外力および前記①の反符号力を合計したもの，すなわち，$P_x^1 = -Q_x^1$, $P_y^1 = -Q_y^1$, $P_z^1 = Z_1 - Q_z^1$を作用させ，仮想境界L_0の合力Q_x^0, Q_y^0, Q_z^0を求める．

③ だ円柱（図5(a)）のL_0境界に，前記②の反符号力，$P_x^0 = -Q_x^0$, $P_y^0 = -Q_y^0$, $P_z^0 = -Q_z^0$を作用させ，仮想境界L_1の合力Q_x^1, Q_y^1, Q_z^1を求める．

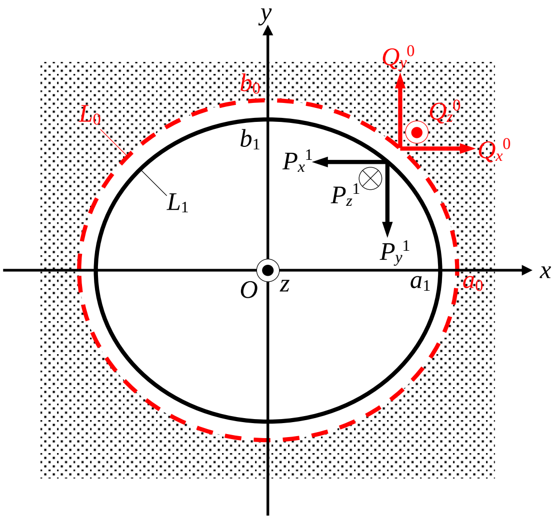
④ 無限体（図5(b)）のL_1境界に，前記③の反符号力，$P_x^1 = -Q_x^1$, $P_y^1 = -Q_y^1$, $P_z^1 = -Q_z^1$を作用させ，仮想境界L_0の合力Q_x^0, Q_y^0, Q_z^0を求める．

⑤ ③，④の操作を，仮想境界上の合力が十分小さくなるまで繰り返す．

式(17)および式(18)には，外力P_x^j, P_y^jおよびP_z^jにより決定される複素定数$\Gamma_{kn,j}$が含まれる．③，④，⑤のプロセスにより，



(a) L_0を境界とするだ円柱



(b) L_1をだ円孔に持つ無限体

図 5　拘束解除法で用いる 2 モデル

これらの複素定数を繰り返し定め，図5の2モデルの複素応力関数を定めれば，図1のだ円筒の複素応力関数はこれらの和で表される．したがって，この複素応力関数を式(7), (10)に適用すれば，本論文で対象としている図1のだ円筒の応力，変位分布を定めることができる．

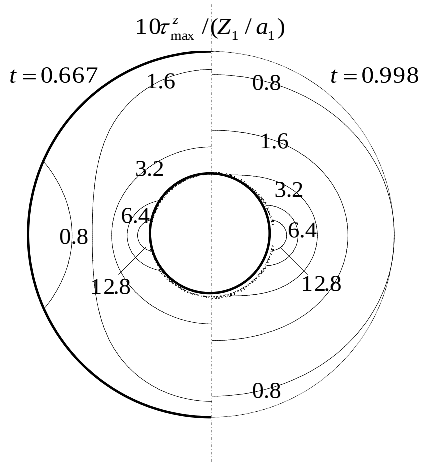
４．数値計算例

数値計算は円筒を対象に行う．材料定数および円筒の形状は，前報[9]と同じ条件とする．

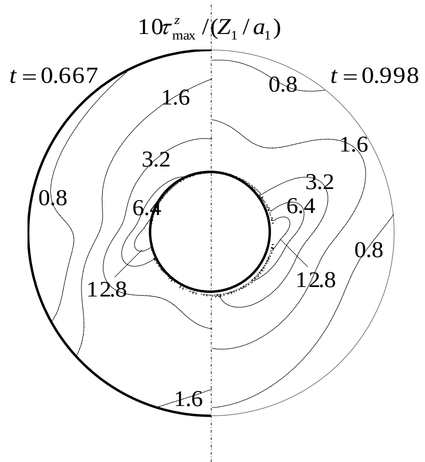
4.1　対向集中荷重が作用する場合

L_1境界とx軸の交点2箇所に互いに反対向きのz軸方向対向集中荷重Z_1が作用するときの最大せん断応力の等高線を図6および図7に示す．

図中にある変数tはだ円筒の層厚を表したもので，

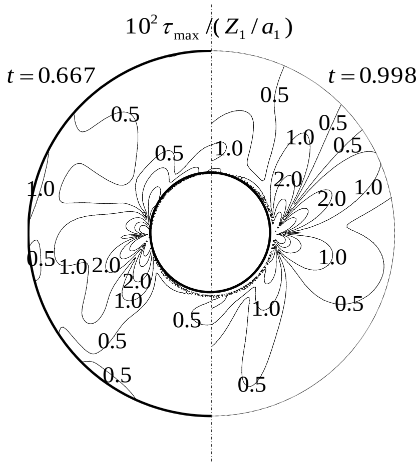


(a) $\alpha=90°$, $\beta=\gamma=0°$.

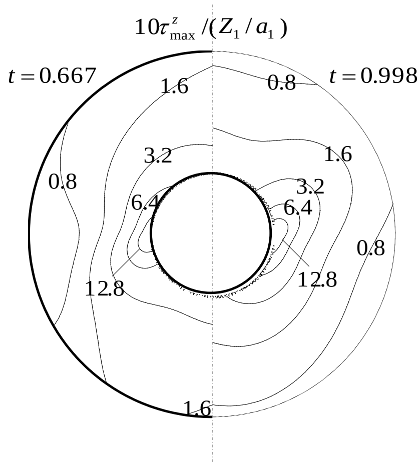


(b) $\alpha=\beta=0°$, $\gamma=45°$.

図6　弾性主軸が面外傾斜していない場合の面外最大せん断応力$\tau_{\max}{}^{z}$の等高線



(a) 面内最大せん断応力$\tau_{\max}$.



(b) 面外最大せん断応力$\tau_{\max}{}^{z}$

図7　弾性主軸が面外傾斜している場合の最大せん断応力の等高線

$$t=1.0-\frac{a_1}{a_0}. \tag{19}$$

で定義されるパラメータである．このパラメータは，層厚が薄ければ0に，厚ければ1に収束する．

各々の図は，右側半分に$t=0.667$（つまり，外径$2a_0$が内径$2a_1$の3倍のだ円筒），左側半分に$t=0.998$（内部に直径$2a_1$の円孔が存在する無限体）の場合の分布が示されている．

まず，図6は弾性主軸がx-y平面内に2つとz軸方向に1つ存在する（弾性主軸が面外傾斜していない）場合の等高線である．このとき，図7で後述するような，面外せん断荷重による面内応力成分の連成が起きないため，以下の面外最大せん断応力の等高線図を示した．

$$\tau^{z}_{\max}=\sqrt{\tau^2_{yz}+\tau^2_{xz}}\,. \tag{20}$$

図6(a)はx-y平面内で横等方性となっている場合の等高線である．この等高線は，x-y平面内に傾斜していないことが読み取れる．そして，右側における等方性無限体内の楕円孔境界に対向集中荷重Z_1が作用しているときの等高線は，中山が求めた解[10]に一致していることが確認された．

図6(b)は弾性主軸E_1がx軸から，E_2がy軸からそれぞれ反時計回りに$\gamma=45°$傾斜した，二次元異方性弾性体の結果で，等高線が傾斜していることが読み取れる．いまの場合，左側は図6(a)左側の図を下向きに，右側は図6(a)右側の図を上向きにそれぞれ引き伸ばしたような分布となっているが，これは，左下から右上向きにE_1軸（強軸）が存在し，大きな応力分担することができるからであり，妥当な計算結果であるといえる．

続いて，図7は弾性主軸の1つがz軸に一致していないような，一般的な異方性弾性材料に対する結果を示してある．

図6で対象とした等方性弾性材料や二次元異方性弾性材料では，面内問題と面外せん断問題が相互に影響を及ぼすことはなかったが，一般的な異方性弾性材料では，式(15)で確認できるように，面外せん断荷重によって面内応力成分が誘起される現象が生じる．これを連成効果といい，式(20)とは別に面内問題の最大せん断応力$\tau_{\max}$を新たに導入して考察する．

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau^2_{xy}}\,. \tag{21}$$

式(21)により面内最大せん断応力の分布を図7(a)に示している．$\tau_{\max}$の分布は面外最大せん断応力$\tau_{\max}{}^{z}$の分布よりも小さい

が，L_1境界周辺では20%程度の大きさを有する．また，図6(b)の状態からx軸まわりに$\alpha = 45°$ 回転させた円筒であるので，面外の最大せん断応力はほぼ同じ分布形となっている．

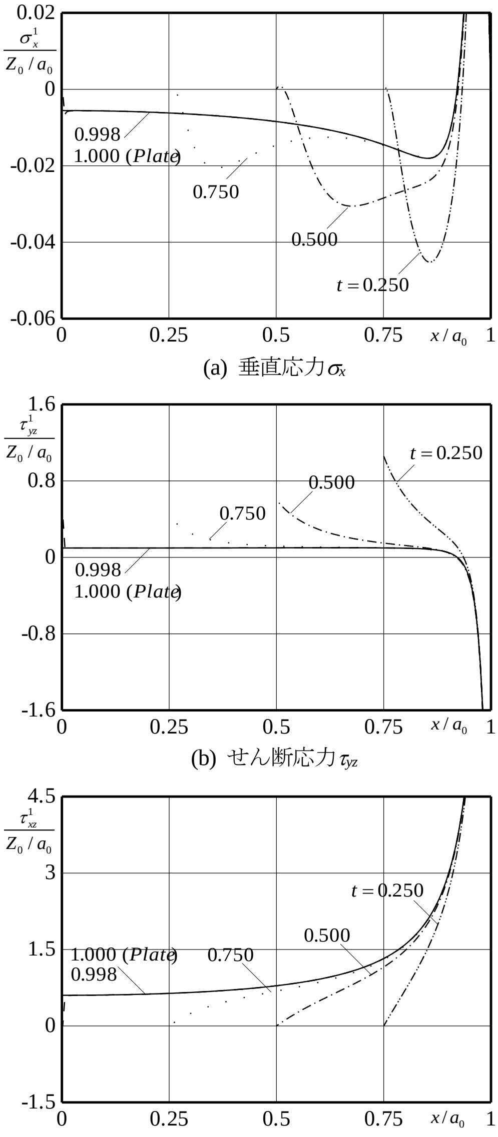
図6および図7について，$t = 0.667$の場合は作用している対向集中荷重を限られた円管領域で受け持たなければならないことから大きな値で広範囲に分布しているのに対し，無限体を想定した$t = 0.998$の場合にはより広範囲で分担するために，孔から離れるにつれ，分担応力が小さくなる傾向にある．

4.2　対向分布荷重が作用する場合

円筒の外側境界L_0上，x軸を挟んだ$\omega / 2\pi = 1.0\%$の領域に面外せん断応力 $\tau_{rz} = s_0$ が作用するとき，x軸上に生じる応力の分布を図8に示す．

円筒の形状は前報[9]と同じであり，図中には内部に孔のない円柱の解[7]も示した．図7に準ずる弾性主軸の傾斜を与えたため，面内の応力成分σ_xが連成している．そして，各応力の分布は式(19)の t が増す（円筒厚が増す）ほど，ここで得られた解も円柱の厳密解に漸近しており，妥当な計算結果である．

そして，L_1境界上のa_1 / a_0　$(= 1 - t)$の点において，応力σ_x, τ_{xz}は0となっており，境界条件を満たしている．一方，τ_{yz}はL_1境界の点に近づくにつれて急激な応力勾配を伴って変化し，L_1境界上で大きな応力集中を生じていることが確認できる．



(a) 垂直応力σ_x

(b) せん断応力τ_{yz}

(c) せん断応力τ_{xz}

図8　x軸上の応力分布

５．結言

本研究では，一般的な異方性弾性材料からなるだ円筒の両側面に面外せん断荷重が作用する際の解を示した．面内荷重を対象とした前報[9]に続き，拘束解除法を用いて解を導き，円筒を対象にいくつかの数値計算を行った．

円筒については，面外せん断荷重を対象とした研究が見当たらないため，本論文の解の妥当性は，中山らが無限体中に存在する孔に対向集中荷重が作用する場合の解を用いて検証した．その結果，本論文の解の妥当性が確認され，集中荷重のほかにこれを近似した分布荷重についても計算例を示した．

計算例では筒の内外二境界が焦点を同じくする共焦だ円群の場合についてのみ行ったが，焦点を異にする場合についても問題なく解を得ることができる．

今後は，だ円筒について面内荷重に対する応力拡大係数（破壊モードI, II）を求めた著者らの論文に続き，ここでの成果を応用して，面外せん断荷重に対する応力拡大係数（破壊モードIII）を求めることなどが課題として挙げられる．

参考文献

(1) Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., Theory of elasticity, McGraw-Hill Book Company, 559pp., 1970.

(2) 森口繁一，2次元弾性論，岩波書店，77pp., 1957.

(3) 川久保昌平，平島健一，複素応力関数を用いた楕円輪問題の応力・変位解析, 材料, Vol. 46, No. 9, pp.1011-1016, 1997.

(4) Lekhnitskii, S. G., Anisotropic Plates, Gordon and Breach Science Publishers, 534pp., 1958.

(5) Lekhnitskii, S. G.,Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden Day Inc., 404pp., 1963.

(6) 川久保昌平，堤隆，平島健一，任意分布の荷重を受ける異方性楕円板の応力，変位場，日本機械学会論文集（A編），62-599，pp. 98-105，1996.

(7) 種健，内田武，佐々木徹，浜野浩幹，側面に任意分布荷重が作用する異方性楕円柱の解析，北九州工業高等専門学校研究報告，Vol. 45，pp. 5-10，2012.

(8) 堤隆，平島健一，拘束解除法を用いた直交異方性楕円リングの応力，変位の解析，日本機械学会論文集（A編），63-615，pp.2411-2416，1997.

(9) 種健，内田武，萬恒平，佐々木徹，浜野浩幹，面内荷重を側面に受ける異方性だ円筒の解析，北九州工業高等専門学校研究報告，Vol. 47，pp. 5-10，2014.

(10)中山岳彦，極異方性弾性体の多層問題の解析および幾つかの基本解の誘導，山梨大学修士論文，87pp.，2002.

(2015年11月9日　受理)