

クラックを有する異方性弾性体の応力拡大係数に関する研究

種 健・内田 武・佐々木 徹*・浜野 浩幹**

Research on the Stress Intensity Factors (SIFs) of Anisotropic Elastic Medium with a Crack

Takeshi TANE, Takeshi UCHIDA, Toru SASAKI and Hiroki HAMANO

Abstract

About 80 years ago, brittle failures of the welded structure, such as warships and bridges, were occurred many times. The reason simply comes from the fact that these structures had many poor regions and cracks. In order to prevent such failures, evaluation by the “value of fracture toughness” was introduced, instead of the evaluation by the stresses. This reason is as follows. When the brittle failure is occurred, if the shapes and dimensions of the plates and magnitude of external forces are different, these plates have a different stress value. On the other hand, fracture toughness is nearly constant in any cases for same material. For this reason, value of fracture toughness is used as a design guideline to evaluate the brittle failure. Then analytical solutions of fracture toughness was obtained by many researchers in a way that is based on two-dimensional elastic theory for the isotropic body. And there are testing method for some cases to evaluate fracture toughness. By the way, carbon fiber reinforced plastic (CFRP) is used as a structural material in the aerospace industry, and used amount of CFRP is increasing yearly. By the model, the ratio of CFRP mass to total mass of airplane exceed about 50%. But there are few researches about evaluation of fracture toughness for anisotropic (concluding orthotropic) body, except for the inquest if delamination of CFRP. In this paper, analytical solution of the fracture toughness for anisotropic circular plate with a crack is derived and some numerical results are shown by some figures. In this study, external loadings on the cylindrical surface is expanded to complex form of Fourier series.

Keywords : brittle failure, anisotropic, value of fracture toughness, stress intensity factor, circular plate

1. 緒言

機械の製造，構造物の構築のためにこれらを設計する際には，材料の破断を伴う破壊，および，部材が破壊せずとも構造物が過大な変形により使用不能になる破損を防ぐための検討をしなければならない。

従来の設計は材料力学の考え方を基礎とし，設計照査の力学的パラメータとして【応力】を用いている。すなわち，基準強度（引張強さや降伏点）を安全率で除した許容応力を定め，部材に作用する応力が許容応力を上回らないように断面決定，あるいは，材料選定を行うものである。

一方で，材料のぜい性破壊は内部のクラック（き裂）や介在物を起点に生じるもので，これらの欠陥が新たな欠陥の発生や成長，合体などに繋がって起こることが多い。このクラックが関与する破壊には許容応力度法が適用できないため，新たに線形破壊力学に基づく考え方が導入された。

この線形破壊力学では，新たな力学パラメータとして【応力拡大係数】が用いられる。理由は，外力や形状・寸法の異なる複数の部材がクラックを起点にぜい性破壊に至った場合，応力は部材ごとに異なる値を示すが，この応力拡大係数はほぼ一定値となるからである。

そこで，材料が等方性弾性挙動を示す場合について，クラックが存在する部材に引張，せん断，曲げ，ねじりなど，様々な外力が作用する場合の応力拡大係数が求められ，ぜい性破壊防止の上で一定の貢献をなした¹⁾。

ところで，機械系各分野，とくに航空宇宙分野では省エネの観点から構造の軽量化が永遠の課題であり，軽量かつ高強度な（＝比強度の大きな）部材の開発と適用が絶えず試みら

れている。とくに，炭素繊維強化プラスチック（CFRP）は比強度・比剛性に優れた先進複合材として導入が進み，一般の旅客機では，それまで，機体重量に占める割合が20%程度であったものが，50%に達した機種もある²⁾。

CFRPは炭素繊維により特定方向の強度・剛性が高められているために，異方性弾性挙動を示す。先の応力拡大係数に関する検討について，層間剥離を起こす際の破壊靱性評価は行われてきているが，クラックが繊維に直交している場合や任意に傾いている場合についての検討は少ない。

そこで本研究ではこれまでの成果³⁾を応用し，異方性弾性材料からなる円板にクラックが存在し，任意外力が作用する場合の応力拡大係数の一般式を求め，数値計算例を示す。

2. 解析方法

2.1 概要

著者らが前報で求めた解析解を基に，クラック先端の応力拡大係数を導く。

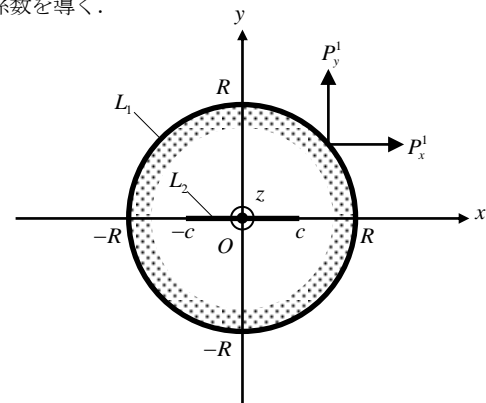


図1 解析モデル

* 長岡工業高等専門学校機械工学科

** 松江工業高等専門学校名誉教授

図1のように、異方性材料からなる半径 R の円板の内部に長さ $2c$ のクラックがあり、この中心は円板の中心と一致しているものとする。すなわち、前報の円筒の問題において、外側の長短軸をともに R 、内側の長短軸を $c, 0$ と置くものである。

外力は、円板の側面 L_1 に x, y 軸方向の任意荷重 P_x^1, P_y^1 を考え、これらを周期 2π の複素フーリエ級数で一括変換して解を求める。これにより、任意荷重の取り扱いが容易に行える。

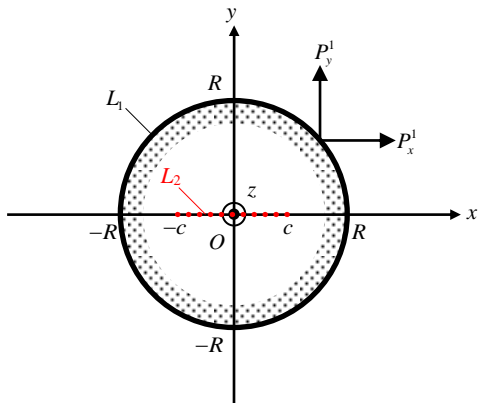
$$\left. \begin{aligned} -P_x^1 &= -\alpha_0^1 - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^1 e^{in\theta} + \bar{\alpha}_n^1 e^{-in\theta}), \\ -P_y^1 &= \beta_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^1 e^{in\theta} + \bar{\beta}_n^1 e^{-in\theta}), \\ -P_z^1 &= \gamma_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^1 e^{in\theta} + \bar{\gamma}_n^1 e^{-in\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 e はネピアの数、 i は虚数単位、 $\alpha_n^1, \beta_n^1, \gamma_n^1$ は境界 L_1 の負荷条件より定まる複素定数(複素フーリエ係数)で、バー記号はこれらの共役複素数を表している。

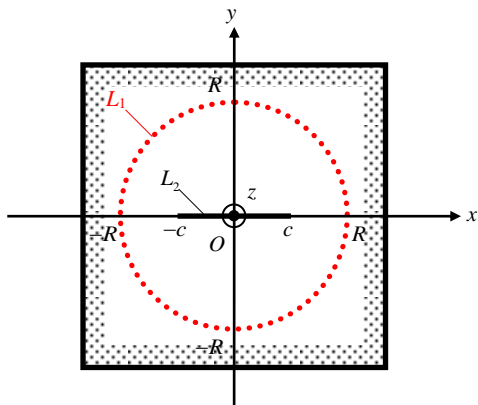
なお、本研究で対象としている図1の厳密解は、二境界 L_1, L_2 への写像関数導入の面で困難を伴うため、図2に示す二モデル、すなわち、

- (a) 境界 L_1 を有する円板 ($j=1$)
- (b) クラック L_2 を有する無限板 ($j=2$)

を使って、拘束解除法により求める(後述)。



(a) 円板



(b) クラックを有する無限体

図2 拘束解除法で用いる二モデル

2.2 応力, 合力および変位を求める式

異方性弾性体に対する二次元弾性理論の基礎方程式(力の釣合方程式, 幾何式(ひずみ-変位関係), 構成方程式(応力-ひずみ関係), ひずみの適合方程式)から、図1の実平面 $z (= x + iy)$ のアフィン変換面 $z_k (= x + \mu_k y)$ の写像変換面 ζ_k において定義される複素応力関数 $\phi_k(\zeta_k)$ ($k=1, 2, 3$)を利用して、材料内の応力, 合力および変位は以下の式で求めることができる。

応力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \phi_k^1(\zeta_k), \quad \sigma_y = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k^1(\zeta_k), \\ \tau_{yz} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k^1(\zeta_k), \quad \tau_{xz} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \lambda_k \phi_k^1(\zeta_k), \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k^1(\zeta_k). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

合力

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k(\zeta_k), \quad P_y = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k(\zeta_k), \\ P_z &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k(\zeta_k). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

変位

$$\left. \begin{aligned} u &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k p_k \phi_k(\zeta_k), \quad v = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \phi_k(\zeta_k), \\ w &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \phi_k(\zeta_k). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、式(2)の記号 1 は変数 z_k による微分を表す。

また、式(2)から式(4)に現れる μ_k, λ_k は材料異方性の程度を表すパラメータで、材料の構成方程式を次式:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ & & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ \text{sym.} & & & a_{55} & a_{56} \\ & & & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

のように表すとき、六次代数方程式の解として求められる。

$$l_4(\mu) \cdot l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0. \quad (6)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} l_2(\mu) &= a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44}, \\ l_3(\mu) &= a_{15}\mu^3 - (a_{14} + a_{56})\mu^2 + (a_{25} + a_{46})\mu - a_{24}, \\ l_4(\mu) &= a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

一方、 λ_k は面内問題と面外せん断問題の連成の程度を表し、次式によって計算できる。

$$\lambda_k = -\frac{l_3(\mu_k)}{l_2(\mu_k)} = -\frac{l_4(\mu_k)}{l_3(\mu_k)}. \quad (8)$$

そして、複素応力関数 $\phi_k(\zeta_k)$ は外力の境界条件より決定されるもので、あらゆる問題で様々な形式を取る。図2(a)の複素応力関数を $\phi_k^1(\zeta_k)$ とすると、これは次式によって表される。

$$\phi_k^1(\zeta_k) = \Gamma_{k0}^1 + \Gamma_{k1}^1 z_k + \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_{kn}^1 P_{kn}(\zeta_{k,1}). \quad (9)$$

ここに,

$$P_{kn}(\zeta_{k,1}) = -(\zeta_{k,1}^{+n} + \zeta_{k,1}^{-n}). \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{k,1}^+ &= \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - R^2(1 + \mu_k^2)}}{R(1 - i\mu_k)}, \\ \zeta_{k,1}^- &= \frac{z_k - \sqrt{z_k^2 - R^2(1 + \mu_k^2)}}{R(1 - i\mu_k)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

一方, 図2(b)の複素応力関数を $\phi_k^2(\zeta_k)$ とすると, これは次式によって表される.

$$\phi_k^2(\zeta_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{kn}^2 \frac{1}{\zeta_{k,2}^n}. \quad (12)$$

ここに,

$$\zeta_{k,2} = \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - c^2}}{c}. \quad (13)$$

式(9)および式(12)において, 新たな複素変数 ζ_k , j が導入されている. これらは, アフィン変換面上の境界 L_j を ζ_k , j 平面上の単位円に変換する写像関数である.

2.3 拘束解除法について

拘束解除法については, 前報で詳しく述べており, 簡単な説明に留める.

(1) 円板の解析

はじめに, 図2(a)の L_1 境界に図1の外力 P_x^1, P_y^1 を作用させる. この外力を複素フーリエ級数展開し, 式(1)のように決定できたとすると, 式(9)の複素定数 Γ_{kn}^1 は, n の値に応じて以下の式から決定される.

$n=0$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\mu_k \Gamma_{k0}^1 + \bar{\mu}_k \bar{\Gamma}_{k0}^1) &= \alpha_0^1, \quad \sum_{k=1}^3 (\Gamma_{k0}^1 + \bar{\Gamma}_{k0}^1) = \beta_0^1, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k \Gamma_{k0}^1 + \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{k0}^1) &= \gamma_0^1, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k p_k \Gamma_{k0}^1 + \bar{\mu}_k \bar{p}_k \bar{\Gamma}_{k0}^1) &= 0, \\ \sum_{k=1}^3 (q_k \Gamma_{k0}^1 + \bar{q}_k \bar{\Gamma}_{k0}^1) &= 0, \quad \sum_{k=1}^3 (r_k \Gamma_{k0}^1 + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_{k0}^1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$n=1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2 \Gamma_{k1}^1 + \bar{\mu}_k^2 \bar{\Gamma}_{k1}^1) &= \frac{\alpha_1^1 - \bar{\alpha}_1^1}{iR}, \\ \sum_{k=1}^3 (\Gamma_{k1}^1 + \bar{\Gamma}_{k1}^1) &= -\frac{\beta_1^1 + \bar{\beta}_1^1}{R}, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k \Gamma_{k1}^1 + \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{k1}^1) &= \frac{\gamma_1^1 + \bar{\gamma}_1^1}{R}, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k \lambda_k \Gamma_{k1}^1 + \bar{\mu}_k \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{k1}^1) &= -\frac{\gamma_1^1 - \bar{\gamma}_1^1}{iR}, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k \Gamma_{k1}^1 + \bar{\mu}_k \bar{\Gamma}_{k1}^1) &= \frac{\beta_1^1 - \bar{\beta}_1^1}{iR} = -\frac{\alpha_1^1 + \bar{\alpha}_1^1}{R}, \\ \sum_{k=1}^3 \{ (q_k - \mu_k^2 p_k) \Gamma_{k1}^1 + (\bar{q}_k - \bar{\mu}_k^2 \bar{p}_k) \bar{\Gamma}_{k1}^1 \} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$n \geq 2$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\mu_k m_k^n \Gamma_{kn}^1 + \bar{\mu}_k \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}^1) &= -\bar{\alpha}_n^1, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k \Gamma_{kn}^1 + \bar{\mu}_k \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}^1) &= -\alpha_n^1, \\ \sum_{k=1}^3 (m_k^n \Gamma_{kn}^1 + \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}^1) &= -\bar{\beta}_n^1, \quad \sum_{k=1}^3 (\Gamma_{kn}^1 + \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}^1) = -\beta_n^1, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k m_k^n \Gamma_{kn}^1 + \bar{\lambda}_k \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}^1) &= -\bar{\gamma}_n^1, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k \Gamma_{kn}^1 + \bar{\lambda}_k \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}^1) &= -\gamma_n^1. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

そして, これらの結果を式(9)に代入の上, 図2(a)の仮想境界 L_2 の合力 P_x^2, P_y^2, P_z^2 を式(3)で求める.

そして, これら合力の反符号成分を式(1)と同様, 周期 2π の複素フーリエ級数に展開して, 複素フーリエ係数を決定する.

$$\left. \begin{aligned} P_x^2 &= -\alpha_0^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 e^{in\theta} + \bar{\alpha}_n^2 e^{-in\theta}), \\ P_y^2 &= \beta_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^2 e^{in\theta} + \bar{\beta}_n^2 e^{-in\theta}), \\ P_z^2 &= \gamma_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n^2 e^{in\theta} + \bar{\gamma}_n^2 e^{-in\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(2) 無限板の解析

つぎに, 図2(b)の無限板の L_2 境界 (クラック) に式(17)の合力 P_x^2, P_y^2, P_z^2 を作用させる. すると, 式(12)の複素定数 Γ_{kn}^2 は, n の値に応じて以下の式から決定される.

$n=0$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\mu_k \Gamma_{k0}^2 + \bar{\mu}_k \bar{\Gamma}_{k0}^2) &= \alpha_0^2, \quad \sum_{k=1}^3 (\Gamma_{k0}^2 + \bar{\Gamma}_{k0}^2) = \beta_0^2, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k \Gamma_{k0}^2 + \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{k0}^2) &= \gamma_0^2, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k p_k \Gamma_{k0}^2 + \bar{\mu}_k \bar{p}_k \bar{\Gamma}_{k0}^2) &= 0, \\ \sum_{k=1}^3 (q_k \Gamma_{k0}^2 + \bar{q}_k \bar{\Gamma}_{k0}^2) &= 0, \quad \sum_{k=1}^3 (r_k \Gamma_{k0}^2 + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_{k0}^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$n \geq 1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \mu_k \Gamma_{kn}^2 &= \bar{\alpha}_{n,1}^1, \quad \sum_{k=1}^3 \bar{\mu}_k \bar{\Gamma}_{kn}^2 = \alpha_{n,1}^1, \\ \sum_{k=1}^3 \Gamma_{kn}^2 &= \bar{\beta}_{n,1}^1, \quad \sum_{k=1}^3 \bar{\Gamma}_{kn}^2 = \beta_{n,1}^1, \\ \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Gamma_{kn}^2 &= \bar{\gamma}_{n,1}^1, \quad \sum_{k=1}^3 \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{kn}^2 = \gamma_{n,1}^1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

そして, これらの結果を式(12)に代入の上, 図2(b)の仮想境界 L_1 の合力 P_x^1, P_y^1, P_z^1 を式(3)で求める.

そして, これら合力の反符号成分を式(1)のように, 周期 2π の複素フーリエ級数に展開し, 複素フーリエ係数を決定する.

(3) 円板の解析

再び円板に戻り, 上記(2)の合力反符号成分を図2(a)の L_1 境界に作用させる. 式(14)から式(16)より複素定数 Γ_{kn}^1 を定め, 図2(a)の仮想境界 L_2 の合力 P_x^2, P_y^2, P_z^2 を求める.

そして, これら合力の反符号成分を式(17)のように複素フーリエ級数展開, 複素フーリエ係数を決定する.

(4)収束計算の実施

手順(2)および手順(3)を、互いの仮想境界に発生する合力が十分小さくなるまで繰り返す。この繰り返しにより求められた未定係数 $\Gamma_{kn}^1, \Gamma_{kn}^2$ を合計し、新たに、 $\Gamma_{kn}^1, \Gamma_{kn}^2$ と表すと、本研究対象の図1の複素応力関数は次式によって表される。

$$\begin{aligned} \phi_k(\zeta_k) &= \phi_k^1(\zeta_k) + \phi_k^2(\zeta_k) \\ &= \Gamma_{k0}^1 + \Gamma_{k1}^1 z_k + \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_{kn}^1 P_{kn}(\zeta_{k,1}) + \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{kn}^2 \frac{1}{\zeta_{k,2}^n}. \end{aligned} \quad (20)$$

3. 応力拡大係数を求める公式

一般に図3に示すように、長さ $2c$ のクラックを有する場合、クラック右側先端における破壊モードI, IIおよびIII型の応力拡大係数は、この点からの距離 \bar{r} 、角度 $\bar{\theta}$ を用いて、次式で定義される⁽¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\bar{r}} (\sigma_y)_{\bar{\theta}=0}, \\ K_{II} &= \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\bar{r}} (\tau_{xy})_{\bar{\theta}=0}, \\ K_{III} &= \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\bar{r}} (\tau_{yz})_{\bar{\theta}=0}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(21)に対し、式(2)の応力成分を代入して、本研究における応力拡大係数を求める。

この際、図2(a)の円板はクラックを持たないため応力拡大係数には影響しない。すなわち、複素応力関数としては、式(12)の $\phi^2(\zeta_k)$ のみを利用すればよい。

以上から、本研究における応力拡大係数は次式によって求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= 2\sqrt{\frac{\pi}{c}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\zeta_k), \\ K_{II} &= -2\sqrt{\frac{\pi}{c}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k^2(\zeta_k), \\ K_{III} &= -2\sqrt{\frac{\pi}{c}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k^2(\zeta_k). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

4. 数値計算例

数値計算は、互いに 90° の角度をなす三本の弾性主軸を有する直交異方性材料を対象に行う。

弾性主軸の方向を $j=1, 2$ および 3 として、各方向の縦弾性係数を E_j 、弾性主軸 l と m からなる l - m 平面内のポアソン比を ν_{lm} と表すとき、以下の値を計算に利用した。

$$\frac{E_2}{E_1} = 0.20, \quad \frac{E_3}{E_1} = 1.00, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25.$$

本研究で用いている解析理論は、これら弾性主軸が図1の x, y および z 軸と一致していない場合についても検討可能であるが、ここでは、弾性主軸と座標軸 x, y および z の関係が以下三通りの場合について計算例を示す。

- Case A : $E_x = E_1, E_y = E_2, E_z = E_3.$
- Case B : $E_x = E_2, E_y = E_1, E_z = E_3.$
- Case C : $E_x = E_1, E_y = E_3, E_z = E_2.$

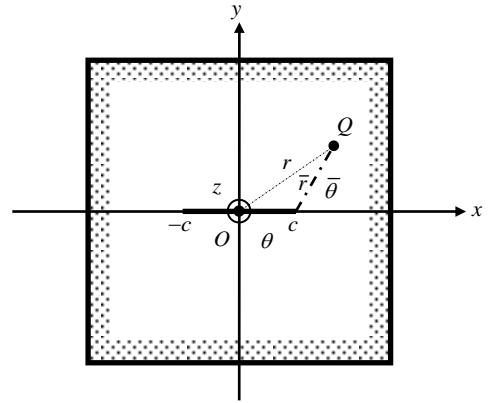


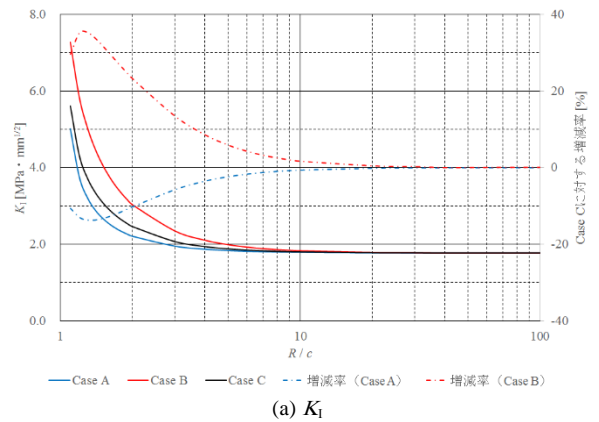
図3 応力拡大係数を求めるための記号

つまり、材料唯一の弱軸がCase Aは y 軸、Case Bは x 軸の方向に取られた場合で、いずれも x - y 平面内異方性を示す場合、Case Cは z 軸の方向を弱軸とする x - y 平面内で横等方性を示す場合に対応する。

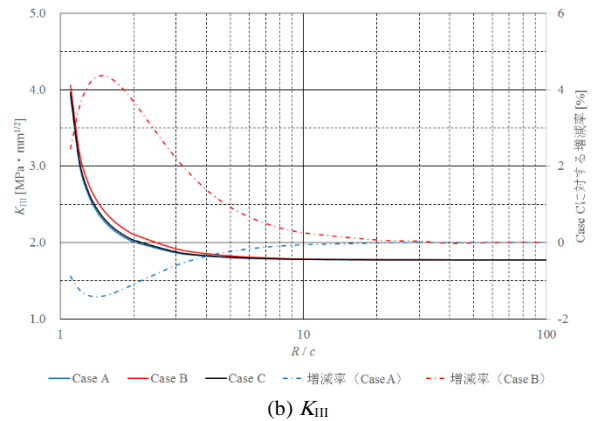
4.1 一様応力が作用する場合

図1の円板側面に一様応力 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{yz}^0, \tau_{zx}^0$ および τ_{xy}^0 相当の表面力が作用している場合を考える。

図4(a)は、 $\sigma_y^0 = 1\text{MPa}$ 相当の表面力が作用する円板の半径を $R = 1.1\text{mm}$ から 100mm まで変化させ、内部のクラック長 $2c =$



(a) K_I



(b) K_{III}

図4 円板側面に一様荷重相当の表面力が作用する場合の応力拡大係数

2mmは一定として、式(22)によりクラック右側先端のモードI型応力拡大係数 K_I を求めたものである。横軸は、円板の半径をクラック半長 c で正規化した値である。

図4(a)から、横軸の値が大きくなるにつれ、Case AからCase C、いずれの場合についても応力拡大係数の値は減少し、 $R/c = 10$ 程度で収束、その値は $K_I = 1.772 \text{MPa} \sqrt{\text{mm}}$ となっている。この値は、無限板中のスリットクラックの応力拡大係数 $K_I = \sigma_y^0 \sqrt{\pi c}$ ⁽⁴⁾に一致するもので、Sihらが指摘しているようにCase A (異方性)とCase B (等方性)関係なく同じ結果が得られている⁽⁴⁾。

一方、横軸の値が小さくなると、異方性のCase A、Case Bと等方性のCase Cで応力拡大係数の値が異なってくる。右側の縦軸に、Case AおよびCase B (ともに異方性)のCase C (等方性)に対する応力拡大係数の増減率を示した。

今回の計算例では、Case Aのように材料の強軸と荷重(σ_y^0)の方向が一致すると、等方性の場合よりも応力拡大係数が小さくなり、 $R/c = 1.3$ でその差は最大、約14%であることが分かった。一方、Case Bのように材料の強軸と荷重(σ_y^0)の方向が直交する場合は、等方性の場合よりも応力拡大係数が大きくなり、 $R/c = 1.3$ でその差は最大、約35%に上ることが分かった。

図4(b)は、 $\tau_{rz}^0 = 1 \text{MPa}$ の場合について、同様にモードIII型の応力拡大係数を求めたものである。先のモードI型の応力拡大係数と同様な傾向が見られる。ただし、応力拡大係数の増減率は、Case Aのとき、 $R/c = 1.4$ で約1.4%、Case Bのとき、同じく $R/c = 1.4$ で約4.3%と小さい。

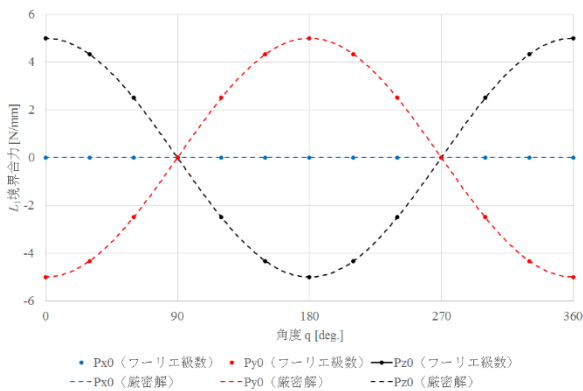


図5 外力フーリエ級数展開の結果

図5は、一例として $R/c = 5$ のときの L_1 境界の合力の分布をまとめたものである。実線が厳密解、マーカー表示が複素フーリエ級数展開後の結果であり、問題なくフーリエ級数展開がなされたことを意味している。

内側境界 L_2 については、外力が作用しないため、全ての合力が0になっていることを確認している。

4.2 圧縮集中荷重が作用する場合

円柱が等方性を示す場合について、図6のようにx軸上に圧縮集中荷重 P が負荷される場合を考える。

クラックが存在しない場合、つまり、図6において $c/R = 0$ のとき、x軸上のy軸方向の垂直応力は次式で求められる⁽⁵⁾。

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi R} \tag{23}$$

つまり、x軸方向に圧縮荷重を負荷することで直角方向には一様な引張応力が生じる。

コンクリートや岩盤など、脆性材料の引張強度は割裂試験と呼ばれる間接引張試験法により算定されるが、負荷によって図6のように内部にクラックが発生した場合には、クラック両端で応力 σ_y の特異性が生じると考えられ、この場合の応力拡大係数およびx軸上の応力分布を求めた。

表1は、半径 $R = 25 \text{mm}$ の円板に集中荷重 $P = 1 \text{N/mm}$ が加わり、 $2c = 0.5, 1.0, 2.0$ および 4.0mm のクラックが発生した場合に対し、クラック右側先端の応力拡大係数およびx軸上の応力 σ_x を求めたものである。

表1より、図4と同様にクラック長が長いほど応力拡大係数の値が増加している。また、図7から、クラックが発生するとクラック先端で応力 σ_x が無限大に発散していること、クラックの発生により、クラックのない式(23)の厳密解よりも応力 σ_x が大きくなっていることから、妥当な計算結果が得られたと考えられる。

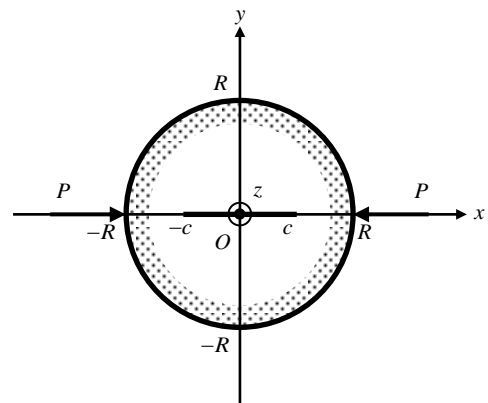


図6 集中荷重を受ける円板

表1 応力拡大係数 K_I の値

c / R	$K_I [\text{MPa} \sqrt{\text{mm}}]$
0.01	0.015
0.02	0.022
0.04	0.031
0.08	0.044

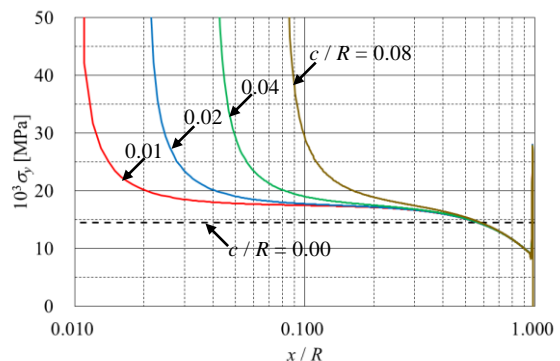


図7 x軸上の応力 σ_x の分布

5. 結言

本研究では、異方性弾性を示す円柱の内部にスリットクラックが存在し、円柱側面に任意の荷重が作用する場合について、クラック先端の応力拡大係数や応力分布を計算した。得られた知見を以下に示す。

- (1) 内外二境界を有する問題は、煩雑さなどから写像関数利用により容易に解析できる範囲の問題に限定されていたが、取り扱いの容易な拘束解除法を導入することで、この問題を解決した。
- (2) 円柱側面に一様応力相当の表面力が加わる場合、円柱寸法がクラック長に比して非常に大きい場合は、従来の無限板中のクラックの応力拡大係数に一致する。
- (3) 上記(2)と関連して、円柱寸法が小さくなると、応力拡大係数は異方性の影響を受ける。
- (4) 圧縮集中荷重の数値計算例を示した。
- (5) 応力の他、変位の分布についても、容易に計算できるようになっている。

参考文献

- (1) 岡村弘之、線形破壊力学入門、培風館、226pp., 1989.
- (2) 邊 吾一、石川隆司、先進複合材料工学、培風館、pp.169-174, 2005.
- (3) 種 健、内田 武、萬 恒平、佐々木徹、浜野浩幹、面内荷重を側面に受ける異方性円筒の解析、北九州工業高等専門学校研究報告、Vol.47, pp.5-10, 2014.
- (4) Sih, G. C., Paris, P. C. and Irwin, G. R., On Crack in Rectilinearly Anisotropic Bodies, International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 1, Issue 3, pp. 189-203, 1965.
- (5) 森口繁一、“2次元弾性論”, 岩波書店, pp.40-41, 1957.

(2014年11月10日 受理)