

側面に任意分布荷重が作用する異方性楕円柱の解析

種 健・内田 武・佐々木 徹*・浜野 浩幹**

Analysis for Anisotropic Cylinder Subjected Arbitrary Loads on Lateral Surface

Takeshi TANE, Takeshi UCHIDA, Toru SASAKI and Hiroki HAMANO

Abstract

This paper discusses analytical solution for anisotropic cylindroids which is subjected to any loads along the side. It is supposed that these loads are not changed in the direction of a generator. A characteristic of this study is to be able to treat not only in-plane loads but also out-of-plane loads. Analyses are carried out using theory of two-dimensional elasticity, since general solutions are derived from complex stress functions that were shown by S. G. Lekhnitskii. Some example calculations that assumed cleave test are shown graphically.

Key words : Anisotropy, Cylindroids, Theory of Two-Dimensional Elasticity, Complex Stress Function

1. 緒 言

集中荷重を受ける等方性楕円板の解析は、無限級数に展開された Airy の応力関数に対して側面に作用する荷重の境界条件を適用、応力関数の未定係数を決定して行われる^{1),2)}。

一方、直交異方性板の場合、4階の偏微分方程式を満たす応力関数が2つの重調和関数の和で表されるため、解析はより複雑になる。

例えば、大久保は境界条件からフーリエ級数展開された応力関数の未定係数を求めた³⁾。また、Cauwelaertらは半無限板の解析解を利用することによって近似解を求めている⁴⁾。さらに、Lemmonらは有限要素法を用いて解いている⁵⁾。

集中力を受ける楕円板については、林が無限級数に展開した応力関数を適切な写像関数で変換し、弾性主軸が座標軸に対して対称でない場合の接線応力の解を求めている⁶⁾。

このように、弾性主軸がz軸まわりに回転した材料（これを面内傾斜材という）の場合は、Lekhnitskiiの複素変数を用いる方法が有効である⁷⁾。彼は、任意分布の荷重を受ける直交異方性楕円板の解を求めようとしたが、境界条件の不足からすべての未定係数を決定することができなかった。そこで、川久保らが境界条件の不足を補って問題を解くことができたようになった⁸⁾。

しかしながら、直交異方性よりさらに一般的な異方性を示す楕円板の解は見当たらないのが現状である。さらに、楕円柱側面を母線方向にせん断するような面外の分布荷重を受ける楕円体の解析は行われていない。

そこで、本研究では川久保らの導出した直交異方性の解を一般的な異方性の場合に拡張し、面内荷重および面外荷重を対象とした数値計算例を示す。

2. 基礎方程式

2.1 解析モデル

図1に示されるように、任意の異方性を示す楕円柱（長軸 a 、短軸 b ）の側面 L に、表面荷重 P_x^L, P_y^L, P_z^L が作用する場合について、写像関数を用いた2次元弾性理論により解を導く。

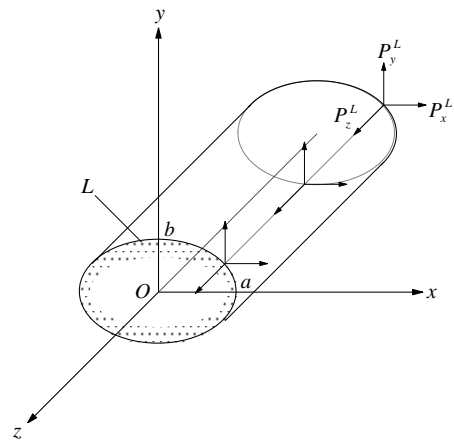


図1 解析モデル

楕円柱の母線方向にz軸、楕円断面の長軸の方向にx軸、短軸の方向にy軸を取った O -xyz 座標系を設け、断面形状ならびに表面荷重はz軸方向に変化しないと仮定する。

2.2 基礎方程式

平面ひずみ的な取り扱いをする場合、異方性弾性体の構成方程式は、一般化フックの法則より次式で表すことができる。

$$\begin{cases} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{24} & \beta_{25} & \beta_{26} \\ \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{44} & \beta_{45} & \beta_{46} \\ \beta_{15} & \beta_{25} & \beta_{45} & \beta_{55} & \beta_{56} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{46} & \beta_{56} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{cases} \quad (1)$$

ここに、

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{3j}}{a_{33}} \quad (2)$$

a_{ij} は、通常の弾性コンプライアンスである。

続いて、 x, y, z 軸方向の力の釣合方程式を次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

* 長岡工業高等専門学校機械工学科

**松江工業高等専門学校名誉教授

式(3)の第 1 式, 第 2 式には, x - y 平面内に作用する応力成分が現れている. 一方, 第 3 式には z 軸方向, つまり, x - y 平面外に作用する応力成分が現れている.

このことから, x - y 平面内の荷重の作用問題を面内問題, z 軸方向の荷重の作用問題を面外問題と呼び, 楕円柱が等方性もしくは直交異方性を示す場合は各々独立に取り扱うことができる.

しかし, 例え直交異方性であっても, その弾性主軸と図 1 の座標軸が一致しない (弾性主軸が x 軸もしくは y 軸に対して回転している) ような場合, 各々は互いに影響を及ぼすことになる (後述).

いま, 式(3)の第 1 式および第 2 式を恒等的に満たすような応力関数 F および第 3 式を恒等的に満たす応力関数 ψ を求めると, これらの応力関数と応力成分との間に以下の関係が成立する.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに, F はエアリーの応力関数, ψ はプラントルの応力関数と呼ばれている.

最後に, x, y, z 軸方向の変位を u, v, w と表わすとき, 微小変形を仮定した幾何式 (ひずみ-変位関係) が次式のように表される.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (5)$$

2.3 応力関数 F, ψ に関する偏微分方程式と一般解

式(5)より, x - y 平面内の 3 ひずみ成分 ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$) は同じく x - y 平面内の 2 変位成分 (u, v) で表されている. 一方, x - y 平面外の 2 ひずみ成分 (γ_{yz}, γ_{zx}) は同じく x - y 平面外の 1 変位成分 (w) で表されている.

このことから, x - y 平面内および x - y 平面外それぞれについて, ひずみ成分の間に 1 つずつの制約条件が存在することになる. これが, ひずみの適合方程式で, 式(5)より次のように求めることができる.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

式(4)で導入された応力関数 F, ψ は, 応力成分が式(1)のようにひずみ成分と関連付けられている以上, 式(6)のひずみの適合方程式を満たす必要がある.

そこで, 式(6)に式(1)および式(4)を代入することで, 応力関数 F, ψ により表示されたひずみの適合方程式 (偏微分方程式) が得られる.

$$L_1 F + L_3 \psi = 0, L_3 F + L_2 \psi = 0. \quad (7)$$

ここに, L_j ($j=2,3,4$) は j 階の微分演算子である.

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_3 &= -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad - (\beta_{14} + \beta_{36}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} L_4 &= \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &\quad - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \end{aligned} \right\}$$

式(7)は, 取り扱う問題によらず, 常に応力関数 F, ψ が満たさなければならない条件を示している.

式(7)の一般解を求めるために, 第 1 式に L_2 (L_3), 第 2 式に L_3 (L_4) を作用させてこれらを差し引くと, 応力関数 F (ψ) に関する 6 階の偏微分方程式が得られる.

$$(L_4 L_2 - L_3^2) F = 0, (L_4 L_2 - L_3^2) \psi = 0. \quad (9)$$

式(9)の一般解は次式で与えられる.

$$F = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k(z_k) dz_k, \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k(z_k). \quad (10)$$

ここに, $\phi_k(z_k)$ ($k=1,2,3$) は複素応力関数と呼ばれる. また, $z_k = x + \mu_k y$ が成り立ち, x, y は楕円柱の座標を表す. μ_k は, 式(9)の特性方程式:

$$l_4(\mu) l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0. \quad (11)$$

の根である. ここに,

$$\left. \begin{aligned} l_2(\mu) &= \beta_{44} - 2\beta_{45}\mu + \beta_{55}\mu^2, \\ l_3(\mu) &= -\beta_{24} + (\beta_{25} + \beta_{46})\mu - (\beta_{14} + \beta_{36})\mu^2 + \beta_{15}\mu^3, \\ l_4(\mu) &= \beta_{22} - 2\beta_{26}\mu + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{16}\mu^3 + \beta_{11}\mu^4. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(11)は, μ に関する 6 次代数方程式であるが, 得られる 6 根は全て複素根となり, 2 根ずつが共役複素数になることが証明されているため, 計算には虚数部が正のものを μ_1, μ_2, μ_3 として利用する.

また, λ_k は次式で求められる複素定数である.

$$\lambda_k = -\frac{l_3(\mu_k)}{l_2(\mu_k)} = -\frac{l_4(\mu_k)}{l_3(\mu_k)} \quad (k=1,2,3). \quad (13)$$

2.4 合力, 応力および変位の一般式

式(10)を式(4)に代入すると, 異方性体の応力が求められる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k^2 \phi_k'(z_k), \sigma_y = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k'(z_k), \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k'(z_k), \\ \tau_{xz} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \lambda_k \phi_k'(z_k), \tau_{yz} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k'(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

上式を積分すると, 合力が次式のように表される.

$$\left. \begin{aligned} \pm P_x &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi_k(z_k), \pm P_y = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \phi_k(z_k), \\ \pm P_z &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \phi_k(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

また, 式(14)を式(1)に代入してひずみ成分を求め, これらを式(5)に代入, 積分することで, 変位が求められる.

$$\left. \begin{aligned} u &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k p_k \phi_k(z_k), v = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \phi_k(z_k), \\ w &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k \phi_k(z_k). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに, p_k, q_k および r_k は複素定数である.

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{1}{\mu_k} \{ \beta_{11} \mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16} \mu_k + \lambda_k (\beta_{15} \mu_k - \beta_{14}) \}, \\ q_k &= \frac{1}{\mu_k} \{ \beta_{12} \mu_k^2 + \beta_{22} - \beta_{26} \mu_k + \lambda_k (\beta_{25} \mu_k - \beta_{24}) \}, \\ r_k &= \frac{1}{\mu_k} \{ \beta_{14} \mu_k^2 + \beta_{24} - \beta_{46} \mu_k + \lambda_k (\beta_{45} \mu_k - \beta_{44}) \}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(k = 1, 2, 3)

以上より、問題に応じた複素応力関数 $\phi_k(z_k)$ を決定できれば、弾性体の解析を行うことができる。

3. 解析解の導出

楕円柱の側面に各軸方向の外力が加わるとき (図 1), 複素応力関数は次式のように表される⁹⁾。

$$\phi_k(z_k) = \Gamma_{k0} + \Gamma_{k1} z_k - \sum_{n=2}^{\infty} \Gamma_{kn} P_{kn}(z_k) \quad (k=1, 2, 3). \quad (18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} P_{kn}(z_k) &= (\zeta_k^+)^n + (\zeta_k^-)^n, \\ \zeta_k^+ &= \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - 4m_k R_k^2}}{2R_k}, \\ \zeta_k^- &= \frac{z_k - \sqrt{z_k^2 - 4m_k R_k^2}}{2R_k}, \\ R_k &= \frac{1}{2}(a - i\mu_k b), \quad m_k = \frac{a - i\mu_k b}{a + i\mu_k b}, \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, 3). \quad (19)$$

また、 $\Gamma_{kn}(n \geq 0)$ は複素定数であり、楕円柱の側面に加わる外力の条件などから以下のように決定できる。

$n=0$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\mu_k \Gamma_{k0} + \bar{\mu}_k \bar{\Gamma}_{k0}) &= b_0, \quad \sum_{k=1}^3 (\Gamma_{k0} + \bar{\Gamma}_{k0}) = a_0, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k \Gamma_{k0} + \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{k0}) &= c_0, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k p_k \Gamma_{k0} + \bar{\mu}_k \bar{p}_k \bar{\Gamma}_{k0}) &= u_0, \\ \sum_{k=1}^3 (q_k \Gamma_{k0} + \bar{q}_k \bar{\Gamma}_{k0}) &= v_0, \quad \sum_{k=1}^3 (r_k \Gamma_{k0} + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_{k0}) = w_0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$n=1$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\mu_k^2 \Gamma_{k1} + \bar{\mu}_k^2 \bar{\Gamma}_{k1}) &= \frac{b_1 - \bar{b}_1}{ib}, \\ \sum_{k=1}^3 (\Gamma_{k1} + \bar{\Gamma}_{k1}) &= -\frac{a_1 + \bar{a}_1}{a}, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k \Gamma_{k1} + \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{k1}) &= \frac{c_1 + \bar{c}_1}{a}, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k \lambda_k \Gamma_{k1} + \bar{\mu}_k \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{k1}) &= -\frac{c_1 - \bar{c}_1}{ib}, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k \Gamma_{k1} + \bar{\mu}_k \bar{\Gamma}_{k1}) &= \frac{a_1 - \bar{a}_1}{ib} = -\frac{b_1 + \bar{b}_1}{a}, \\ \sum_{k=1}^3 \{ (q_k - \mu_k^2 p_k) \Gamma_{k1} + (\bar{q}_k - \bar{\mu}_k^2 \bar{p}_k) \bar{\Gamma}_{k1} \} &= 2\omega_{xy}^0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$n \geq 2$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (\mu_k m_k^n \Gamma_{kn} + \bar{\mu}_k \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}) &= -\bar{b}_n, \\ \sum_{k=1}^3 (\mu_k \Gamma_{kn} + \bar{\mu}_k \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}) &= -b_n, \\ \sum_{k=1}^3 (m_k^n \Gamma_{kn} + \bar{\Gamma}_{kn}) &= -\bar{a}_n, \quad \sum_{k=1}^3 (\Gamma_{kn} + \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}) = -a_n, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k m_k^n \Gamma_{kn} + \bar{\lambda}_k \bar{\Gamma}_{kn}) &= -\bar{c}_n, \\ \sum_{k=1}^3 (\lambda_k \Gamma_{kn} + \bar{\lambda}_k \bar{m}_k^n \bar{\Gamma}_{kn}) &= -c_n. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここに、 $a_n, b_n, c_n (n \geq 0)$ は楕円柱の側面に加わる合力 P_x^L, P_y^L および P_z^L を周期 2π の複素フーリエ級数:

$$\left. \begin{aligned} -P_x^L &= -b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{b}_n e^{-in\theta} + b_n e^{in\theta}), \\ -P_y^L &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n e^{-in\theta} + a_n e^{in\theta}), \\ -P_z^L &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{c}_n e^{-in\theta} + c_n e^{in\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

に展開したときのフーリエ係数である。また、バー記号は共役複素数を表している。

4. 数値計算例

数値計算を示すにあたり、材料は直交異方性を仮定する。3 方向の縦弾性係数比およびポアソン比は以下の値とする。

$$e_2 = \frac{E_2}{E_1} = 0.20, \quad e_3 = \frac{E_3}{E_1} = 1.00, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{32} = 0.25.$$

3 方向の縦弾性係数は、図 1 の座標軸から次の角度で傾斜している場合を考える。

- ① $\alpha = 90^\circ, \beta = \gamma = 0^\circ$. (x-y 平面内で横等方性)
- ② $\alpha = \beta = 0^\circ, \gamma = 45^\circ$. (x-y 平面内で異方性)
- ③ $\alpha = \gamma = 45^\circ, \beta = 0^\circ$. (最も一般的な異方性)

傾斜角 α, β, γ はそれぞれ x, y, z 軸まわりの回転角を表す。

4.1 対向集中荷重の場合

図 2 に示すように、楕円柱の長軸上に x, z 軸方向の集中荷重 P, S が作用する場合を考える。

x 軸から反時計まわりに測定した角度 θ に対し、境界 L の x, z 軸方向の合力の分布は次式のように表される。

$$-P_x^L = \begin{cases} P & \text{for } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 & \text{for } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (24)$$

$$-P_z^L = \begin{cases} S & \text{for } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 & \text{for } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (25)$$

図 3 は、横軸に角度 θ 、縦軸に x 軸方向の合力 $-P_x^L$ を取り、式 (24) を図示したものである。

式 (24) および式 (25) は周期 2π の周期関数であるから、これらを式 (23) のように複素フーリエ級数に展開すると、フーリエ係数は次式のように求められる。

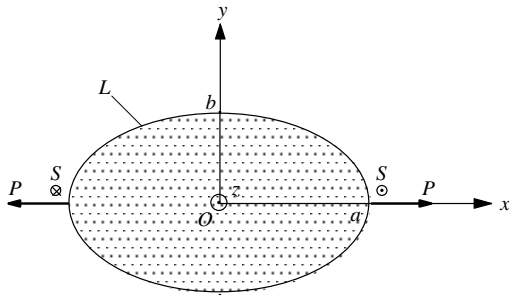


図2 対向集中荷重 P, S を受ける楕円柱

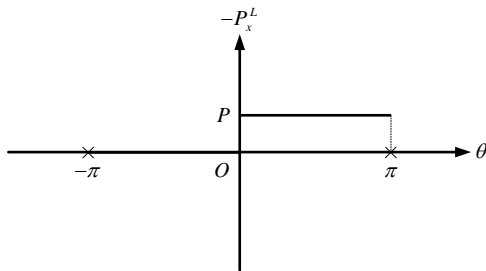


図3 対向集中荷重 P が作用する場合の境界 L 上の合力の分布

$$b_0 = -\frac{P}{2}, b_n = \frac{iP}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \quad (n \geq 1). \quad (26)$$

$$c_0 = -\frac{S}{2}, c_n = \frac{iS}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \quad (n \geq 1). \quad (27)$$

図3に、楕円柱の中心点（座標系の原点）における基準化された応力成分 σ_x^o, σ_y^o および τ_{zx}^o を偏平率 $f = b/a$ を横軸として示す。

①の横等方性の場合の結果は、Brisbane の結果と完全に一致している。②の異方性の場合、川久保らの示した結果に一致したものとなっている。

また、③は本章で取り扱った最も一般的な異方性体に対する計算結果である。面外のせん断応力成分が発生していることを確認できる。

また、楕円柱の偏平率が小さくなるほど、対向集中荷重と平行な直線状の媒体に近づく。すると、応力成分は荷重方向の垂直応力である σ_x^o だけが次第に増大し、それ以外の応力成分は0に近づく。

逆に、偏平率が大きくなるほど、楕円柱は荷重と垂直な直線状の媒体に近づく。このとき、3 応力成分全てがある値に一樣収束している。

4.2 対向分布荷重の場合

圧縮荷重の場合、図2の対向集中荷重は、加圧量が大きくなるにつれて周方向に分布する荷重となってくる。

そこで、図5に示すように、 x 軸をはさむ角度 ω (rad) の範囲に法線方向の垂直応力 p と面外せん断応力 s が作用する場合を考える。境界上の法線方向の垂直応力ならびに面外方向のせん断応力をそれぞれ σ_ξ^L および $\tau_{z\xi}^L$ と表わすとき、これらの応力の分布は次式のように表される。

$$\sigma_\xi^L = \begin{cases} p & \text{for } -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ and } \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0, \\ 0 & \text{for } \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0 \text{ and } \pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0. \end{cases} \quad (28)$$

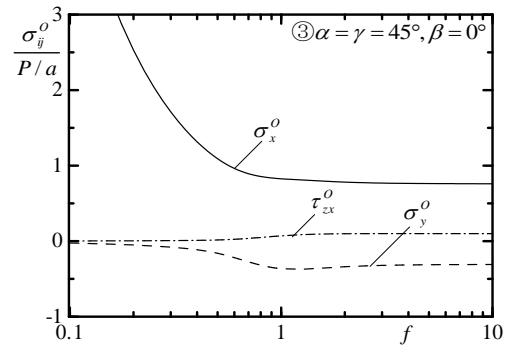
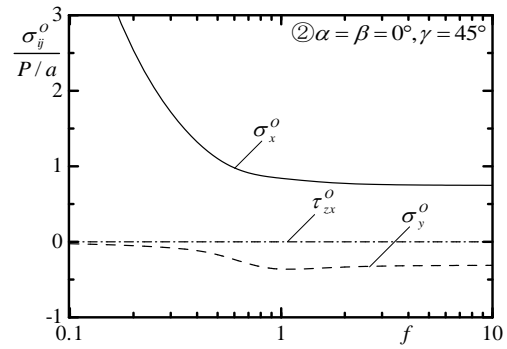
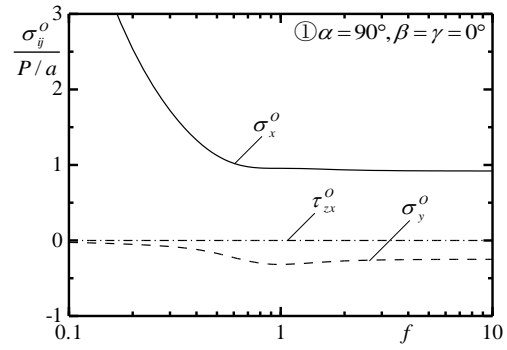


図4 偏平率 f と楕円板中心の応力成分

$$\tau_{z\xi}^L = \begin{cases} s & \text{for } -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ -s & \text{for } \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0, \\ 0 & \text{for } \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0 \text{ and } \pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0. \end{cases} \quad (29)$$

ここに、

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{1}{f} \tan \frac{\omega}{2} \right). \quad (30)$$

$f = b/a$ は楕円柱の偏平率で、式(28)を図6に示す。

いま、式(28)および式(29)に示されるような、楕円柱の側面の分布荷重を周期 2π の複素フーリエ級数で

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi^L &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_n e^{-in\theta} + \alpha_n e^{in\theta}), \\ \tau_{z\xi}^L &= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\beta}_n e^{-in\theta} + \beta_n e^{in\theta}), \\ \tau_{z\xi}^L \sqrt{\sin^2 \theta + f^2 \cos^2 \theta} &= \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\gamma}_n e^{-in\theta} + \gamma_n e^{in\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

のように展開した場合、式(28)のフーリエ係数は次式のように

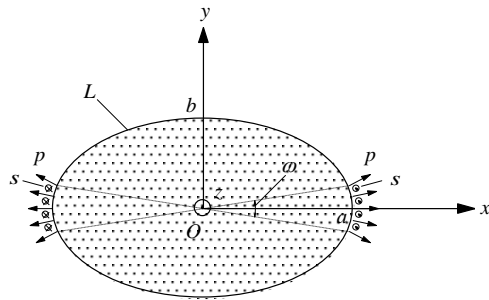


図 5 対向分布荷重 p, s を受ける楕円柱

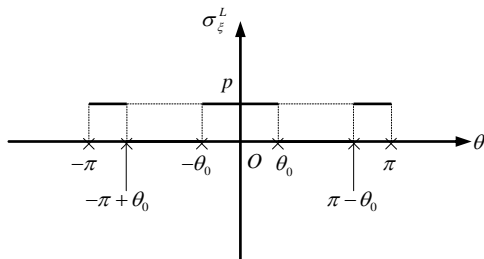


図 6 対向分布荷重 p が作用する場合の境界 L 上の応力の分布

与えられる.

$$\alpha_0 = \frac{2p\theta_0}{\pi}, \quad \alpha_n = \frac{2p}{n\pi} \sin n\theta_0 \cos^2 \frac{n\pi}{2} \quad (n \geq 1). \quad (32)$$

式(29)のフーリエ係数は、数値的に求める. 一例として、表 1 に円柱 ($f=1.00$) の場合の結果を示す.

このように、式(31)に示された分布荷重のフーリエ係数が決定されれば、式(23)の複素フーリエ係数は、次式によって求めることができる.

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{a}{2n} \{ \alpha_{n-1} - \alpha_{n+1} \} + i f \{ \beta_{n-1} + \beta_{n+1} \}, \\ b_n &= -\frac{a}{2n} \{ i f (\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}) - (\beta_{n-1} - \beta_{n+1}) \}, \\ c_n &= \frac{ia}{n} \gamma_n, \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 1). \quad (33)$$

式(32)を式(33)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{ap}{2\pi} (2\theta_0 - \sin 2\theta_0), \\ a_n &= \frac{ap}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \left\{ \frac{\sin(n-1)\theta_0}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta_0}{n+1} \right\}, \\ b_1 &= -\frac{ifap}{2\pi} (2\theta_0 + \sin 2\theta_0), \\ b_n &= -\frac{ifap}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \left\{ \frac{\sin(n-1)\theta_0}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\theta_0}{n+1} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 2). \quad (34)$$

が得られる.

式(34)において $\omega \rightarrow 0$, つまり、図 4 に示される載荷幅が非常に狭くなる場合、 $\theta_0 \approx \omega/2 \rightarrow 0$ であるから、以下のように書くことができる.

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{ifP}{n\pi} \sin^2 \frac{n\pi}{2}, \quad (n \geq 1). \quad (35)$$

表 1 円柱のフーリエ係数 γ_n
(対向分布荷重 s を受ける場合)

n	$\omega/2\pi$ (%)		n	$\omega/2\pi$ (%)	
	1	2		1	2
1	-0.327	-0.323	51	-0.198	0.011
3	-0.327	-0.321	53	-0.189	0.022
5	-0.326	-0.317	55	-0.180	0.033
7	-0.324	-0.312	57	-0.171	0.042
9	-0.323	-0.305	59	-0.162	0.050
11	-0.320	-0.297	61	-0.153	0.056
13	-0.318	-0.287	63	-0.144	0.062
15	-0.315	-0.276	65	-0.135	0.066
17	-0.311	-0.263	67	-0.126	0.068
19	-0.307	-0.250	69	-0.116	0.070
21	-0.303	-0.235	71	-0.107	0.070
23	-0.298	-0.219	73	-0.098	0.069
25	-0.293	-0.203	75	-0.089	0.067
27	-0.287	-0.186	77	-0.080	0.065
29	-0.281	-0.168	79	-0.071	0.061
31	-0.275	-0.150	81	-0.063	0.056
33	-0.269	-0.132	83	-0.054	0.051
35	-0.262	-0.114	85	-0.046	0.046
37	-0.255	-0.097	87	-0.038	0.039
39	-0.247	-0.079	89	-0.030	0.033
41	-0.240	-0.062	91	-0.023	0.026
43	-0.232	-0.046	93	-0.015	0.019
45	-0.224	-0.031	95	-0.008	0.012
47	-0.215	-0.016	97	-0.001	0.005
49	-0.207	-0.002	99	0.006	-0.001

注) $\gamma_n = 0$ ($n=0, 2, 4, \dots$) である.

ここに、

$$-P = \alpha p. \quad (36)$$

であり、式(35)は集中荷重の厳密解である式(26)とよく似た形式で表現できることが分かる.

以上により、対向分布荷重についても楕円柱の応力・変位分布を計算できる.

図 7 には、図 5 の載荷幅を $\omega/2\pi=0.0\%, 1.0\%, 2.0\%$ および 4.0% とした場合の x 軸上の応力分布図が示されている. 弾性主軸の傾斜は③、楕円柱の扁平率が $f \approx 1.00$, すなわち、円柱の場合とした.

上側が σ_x , 下側が τ_{xz} の分布図で、双方とも面外せん断応力 s の載荷幅が狭くなるにつれ、対向集中荷重の厳密解に漸近する傾向が観られる.

また、載荷領域が広がるにつれ、横軸が 0.3 以下になるとこれらの曲線は対向集中荷重の厳密解から徐々に離れてゆく様子を観察できる.

5. 結 言

本論文では、一般的な異方性を示す楕円柱の側面に任意の外力が作用する問題の解析解を求めた.

なお、これまでの研究では作用する荷重が面内荷重に限定されていたことから、新たに面外荷重の作用問題も取り扱えるように理論展開を行うとともに、幾つかの数値計算例を示した.

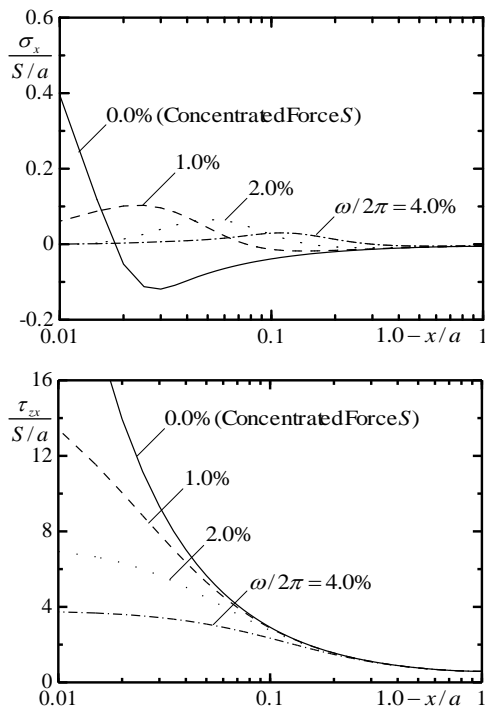


図7 弾性主軸の傾斜が③の状態の x 軸上の応力分布 (円柱の場合)

楕円柱ならびに円柱の理論的研究は、これまで抗張力試験を対象とした対向集中荷重を受ける場合¹⁰⁾がその多くを占めていたが、本論文では面内、面外荷重を問わず、境界での荷重の分布を楕円柱座標系における応力成分で与えることにより、一般的な分布荷重を取り扱い可能とした。

任意分布の荷重を取り扱うために、本研究では境界上の合

力を複素フーリエ級数に展開する手法を用いた。一般的な異方性を対象とした計算例を示したが、これまでに示された解の条件を当てはめると、それらの解に一致していることが確認されている。

また、川久保らは楕円板理論を円板に対して適用すると、問題の誤差が大きくなるとの指摘をしており、この場合には別途円板に対する厳密解を用いていた。しかし、本論文ではそのような問題はなく、円柱の場合についても十分に適用可能であることが確認された。

参考文献

- 1) 森口繁一, 2次元弾性論, 岩波書店, 77pp., 1957.
- 2) J. J. Brisenb, Axial Loading of an Elliptical Disk, J. Appl. Mech., 30, 2, pp.306-309, 1963.
- 3) Okubo, H., J. Math. and Phys., 31, 1952.
- 4) Cauwelaert, F. V., Eckmann, B., Materials and Structures, 27, 1994.
- 5) Lemmon, R. K., Blacketter, D. M., Stress Analysis of an Orthotropic Material under Diametral Compression, Exp. Mech., 36, pp.204-221, 1996.
- 6) 林卓夫, 等価異方性板を用いる平面応力の実験, 日本機械学会論文集, 26-170, pp.1320-1326, 1960.
- 7) Lekhnitskii S. G., Anisotropic Plates, Gordon and Breach Science Publishers, 534pp., 1958.
- 8) 川久保昌平, 堤隆, 平島健一, 任意分布の荷重を受ける異方性楕円板の応力, 変位場, 日本機械学会論文集 (A 編), 62-599, pp.1626-1633, 1996.
- 9) 池田峰雄, 応用数学の基礎, 廣川書店, 276pp., 1999.
- 10) Vutukuri, V. S. et al., 岩の力学的性質, 古今書院, pp.93-102, 1989.

(2011 年 11 月 7 日 受理)