

振動板上における単体粒子の衝突振動

井上 昌信・横道 勲*

Vibro-impact process in granular solid on vibrating plate

Masanobu INOUE and Isao YOKOMICHI*

Abstract

In this paper, an attempt is made to analyze the vibro-impact process in granular solid on harmonically and vertically vibrating plate. The model consists of granular solid, i.e., single ball mass, within gravitational field subject to collision with vibrating plate. Collision with the plate is modeled using a simple impact rule employing a coefficient of restitution, and motions between the plates are assumed to be governed by a linear equation of motion. Based on the equation of motion of the ball, the mapping for period $(n, 1)$ motion is constructed and thereby allowing the stability and bifurcation conditions to be determined. Through numerical simulation, the stability result is observed to be accurate.

Keywords : Vibration, Vibro-impact, Vibrating plate, Periodic motion, Bifurcation, Chaos, Stability result

1. 諸言

不連続な運動による衝突現象は、機械の正常な作動を阻害する要因となり、その多くで力学モデルが考えられ解析例も多い。回転機械では振れ回りの共振域では軸の振動が過大になり、ロータ/ベアリング間で回転と同期した接触・衝突振動が発生するほかに、分数調波衝突、カオス状態の不規則振動によりロータの回転数が攪乱されることがある⁽¹⁾⁽²⁾。

これらの現象の具体例として、例えば吉村によるスクリー一圧縮機ロータ系の衝突振動解析⁽³⁾や、河村らの剛体架線・パンタグラフ系における衝突振動の検討⁽⁴⁾など、機械装置における衝突現象問題を取り扱った報告も多くある。

本研究ではこのような衝突振動の基本問題として、図1に示すような、振動面上の物体が衝突運動するときの1質量モデルの周期衝突振動を解析する。周期衝突振動の安定性の計算では、衝突時刻と衝突速度について、離散系の2次元写像のヤコビ行列⁽⁵⁾を計算し、振動台加速度レベルについて周期運動の安定を表示した。また解析による周期衝突振動のほか、初期条件の影響、周期倍分岐、接線分岐(サドル・ノード分岐)、Hopf分岐の発生、カオスの発生について考察した。

2. 運動解析

質量 m の球が垂直方向振動面と自由落下衝突すると、衝突直後跳ね返る ($e > 0$) 場合と、衝突後ある時間、振動面と付着する ($e = 0$) の場合があるが、ここでは前者における、振動面の n 周期に1回衝突する周期解を解析により求める。

2. 1 運動方程式と周期解 (反発係数 $e > 0$)

重力を受けて自由落下し、振動台と衝突する物体 (1点で衝突する回転を伴わない球) の運動力学モデルは図1の様になる。また運動波形は図2に示す。

ここで、記号を次に様に定義する。

- A: 振動台の X 方向振幅
- ω : 振動台の振動周波数
- t_i : i 回目の球と振動台との衝突時刻
- U_{i-1} : i 回目衝突直前の球の速度

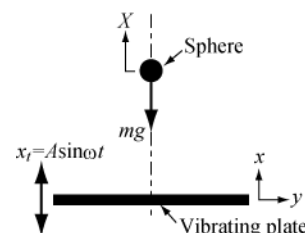
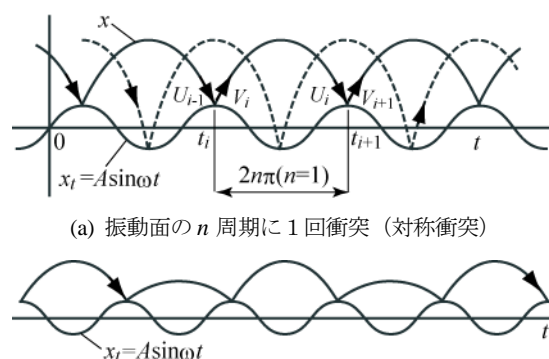


図1 振動台に衝突する物体の力学モデル



(a) 振動面の n 周期に1回衝突 (対称衝突)

(b) 2周期衝突の振動 (非対称衝突)

図2 振動台と衝突する球の振動

- V_i : i 回目衝突直後の球の速度
- e : 振動台と球の間の反発係数
- g : 重力加速度

図1, 2に示すように座標 X を垂直上向きに取り、衝突時刻を $t = t_i$ とすると、球と振動台の衝突位置は、 $A \sin \omega t_i$ で表される。衝突後、球は V_i の速度で上昇し、重力の影響を受けて運動する。振動台と衝突時刻 $t = t_i$ 以後の球の変位はそれぞれ式(1), (2)で表される。

$$x_i = A \sin \omega t_i \quad (1)$$

$$A \sin \omega t_{i+1} = -\frac{g}{2} (t_{i+1} - t_i)^2 + V_i (t_{i+1} - t_i) + A \sin \omega t_i \quad (2)$$

* 北九州工業高等専門学校名誉教授

また時刻 $t = t_{i+1}$ での衝突速度 U_i および振動台の速度 U_b は

$$U_i = \dot{x}_{i+1} = -g(t_{i+1} - t_i) + V_i, \quad U_b = \dot{x}_b = A\omega \cos \omega t_{i+1}$$

これらの式より

$$V_{i+1} - U_b = e(U_b - U_i), \quad e = -\frac{V_{i+1} - U_b}{U_i - U_b}$$

$$V_{i+1} = (1+e)A\omega \cos \omega t_{i+1} + e\{g(t_{i+1} - t_i) - V_i\} \quad (3)$$

が得られ、式(2)、(3)は (t_i, V_i) と (t_{i+1}, V_{i+1}) の離散状態を関係付ける2次元写像である。

2. 2 周期振動解とその安定領域

前述の写像のJacobianを次のように計算する。

$$\begin{pmatrix} t_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} t_i \\ V_i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} & \frac{\partial t_{i+1}}{\partial V_i} \\ \frac{\partial V_{i+1}}{\partial t_i} & \frac{\partial V_{i+1}}{\partial V_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

ところで、振動面の n 周期に1回衝突する球の運動は、

$$t_{i+1} - t_i = \frac{2n\pi}{\omega}, \quad V_{i+1} = V_i \quad (5)$$

であるので、式(2)に代入、整理すると

$$V_i \left(\frac{2n\pi}{\omega} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{2n\pi}{\omega} \right)^2 = 0, \quad \therefore V_i = g \frac{n\pi}{\omega} \quad (6)$$

さらに式(5)を式(3)に代入することにより

$$V_{i+1} = V_i = (1+e)A\omega \cos \omega t_i + e \left\{ g \frac{2n\pi}{\omega} - V_i \right\}$$

ここで、式(6)および振動強度 $K = \frac{A\omega^2}{g}$ を導入すると

$$\cos \omega t_i = \frac{(1-e) \frac{n\pi}{\omega} g}{(1+e)A\omega} = \frac{n\pi(1-e)}{\frac{A\omega^2}{g}(1+e)} = \frac{n\pi(1-e)}{K(1+e)} \quad (7)$$

ちなみに K は、振動台の G 単位の加速度レベル値を意味する。また球の振動台との衝突直前の速度 U_i は

$$U_i = -g(t_{i+1} - t_i) + V_i = -g \cdot \frac{2n\pi}{\omega} + \frac{n\pi}{\omega} g = -V_i$$

より、衝突直前・直後では対称な速度であることが示される。次に、式(4)で示されるJacobianの各行列要素を順次計算する。

まず a_{11} について考える。式(2)を t_i で偏微分すると、

$$(A\omega \cos \omega t_{i+1}) \frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} = A\omega \cos \omega t_i + V_i \left(\frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} - 1 \right) - g(t_{i+1} - t_i) \left(\frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} = \frac{1}{\Delta} \{ A\omega \cos \omega t_i - V_i + g(t_{i+1} - t_i) \}$$

$$\Delta = A\omega \cos \omega t_{i+1} - V_i + g(t_{i+1} - t_i)$$

$$a_{11} = \frac{\partial t_{i+1}}{\partial t_i} = \frac{1}{\Delta} \{ A\omega \cos \omega t_i - V_i + g\beta \} \equiv x \quad (8)$$

$$\beta = t_{i+1} - t_i$$

以下同様に

$$a_{12} = \frac{\partial t_{i+1}}{\partial V_i} = \frac{1}{\Delta} (t_{i+1} - t_i) = \frac{\beta}{\Delta} \quad (9)$$

$$a_{21} = \frac{\partial V_{i+1}}{\partial t_i} = xy - eg \quad (10)$$

$$a_{22} = \frac{\partial V_{i+1}}{\partial V_i} = \frac{y\beta}{\Delta} - e \quad (11)$$

但し、 $eg - (1+e)A\omega^2 \sin \omega t_{i+1} = y$ である。

ところで、行列 \mathbf{J} の固有方程式は λ を固有値とすると、

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (13)$$

となる。これを

$$\lambda^2 - (\text{tr} \mathbf{J})\lambda + \det \mathbf{J} = 0 \quad (14)$$

と書き改め、式(8)~(11)に示すJacobianの行列要素 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{21} 、 a_{22} を用い、行列式 $\det \mathbf{J}$ と $\text{tr} \mathbf{J}$ を求める。

$$\det \mathbf{J} = x \left(\frac{y\beta}{\Delta} - e \right) - \frac{\beta}{\Delta} (xy - eg) = \frac{e}{\Delta} (\beta g - \Delta x)$$

$$= \frac{e(V_i - A\omega \cos \omega t_i)}{A\omega \cos \omega t_{i+1} - V_i + g(t_{i+1} - t_i)} \quad (15)$$

ここで、式(3)を変形した次式；

$$e\{A\omega \cos \omega t_{i+1} - V_i + g(t_{i+1} - t_i)\} = V_{i+1} - A\omega \cos \omega t_{i+1}$$

と、周期性から $V_i = V_{i+1}$ 、 $\cos \omega t_i = \cos \omega t_{i+1}$ により、

$$\det \mathbf{J} = \frac{e^2(V_i - A\omega \cos \omega t_i)}{V_{i+1} - A\omega \cos \omega t_{i+1}} = e^2 \quad (16)$$

一方、 $\text{tr} \mathbf{J}$ についても同様に代入、整理していくと

$$\beta = t_{i+1} - t_i = \frac{2n\pi}{\omega}, \quad V_i = \frac{n\pi}{\omega} g, \quad \sin \omega t_i = \sin \omega t_{i+1}$$

の関係と、振動強度 K 、および式(4)より

$$\text{tr} \mathbf{J} = (1+e^2) - (1+e)^2 K \sin \omega t_i \quad (17)$$

ところで、式(13)で示した固有方程式は、図3に示すように、

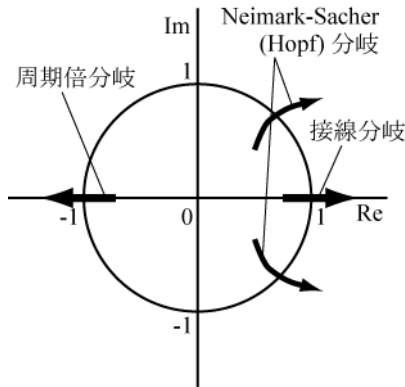


図3 写像分岐に伴うJacobianの固有値

根 λ が ± 1 の場合に安定限界となる。

まず $\lambda = -1$ の場合には、衝突振動系は周期倍振動を生じて分岐する。この時の振動強度 K と反発係数 e の関係は、 $\lambda^2 - (\text{tr}\mathbf{J})\lambda + (\det\mathbf{J}) = 0$ の式に、 $\lambda = -1$ および $\det\mathbf{J} = e^2$ を代入し、また式(17)より

$$\sin\omega t_i = \frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2 K} \quad (18)$$

さらに式(7)、および $\cos^2 \omega t_i + \sin^2 \omega t_i = 1$ の関係より

$$K = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 n^2 \pi^2 + \frac{4(1+e^2)^2}{(1+e)^4}} \quad (19)$$

一方、 $\lambda = 1$ では $1/n$ 周期運動が他の不安定な運動へ変化し始め、衝突振動系は接線分岐をする。 $\lambda = -1$ の時と同様に固有方程式に代入すると

$$1 - \text{tr}\mathbf{J} + e^2 = 0, \quad (1+e)^2 K \sin\omega t_i = 0$$

$K \neq 0$ より $\sin\omega t_i = 0$ 。それ故

$$\sin^2 \omega t_i = 1 - \cos^2 \omega t_i = 1 - \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2 K^2} n^2 \pi^2 = 0$$

$$K = \frac{1-e}{1+e} n\pi \quad (20)$$

この時、球は振動台の中立位置で衝突することになり、式(19)、(20)より振動強度 K の次の範囲では分岐しないことがわかる。

$$\frac{1-e}{1+e} n\pi < K < \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 n^2 \pi^2 + \frac{4(1+e^2)^2}{(1+e)^4}} \quad (21)$$

続いて、固有方程式(14)による、安定条件を求める。安定条件は、固有方程式の固有値 $\lambda_{1,2}$ の値が Gauss 平面上の原点を中心とする単位円内に存在することが必要であるので、

$$|\lambda_{1,2}| < 1 \quad (22)$$

であり、発生した外乱は収束して安定な周期運動となる。固有方程式を一般形で表示すると

$$d_0 \lambda^2 + d_1 \lambda + d_2 = 0 \quad (14)'$$

$$d_0 = 1, \quad d_1 = -\text{tr}\mathbf{J}, \quad d_2 = \det\mathbf{J}$$

Schurの定理から安定条件は、 $\left|\frac{d_2}{d_0}\right| < 1$, $\left|\frac{d_1}{(d_0 + d_2)}\right| < 1$ である。

従って、 $\left|\frac{d_2}{d_0}\right| = \left|\frac{\det\mathbf{J}}{1}\right| = |e^2| < 1$ となり、常に成立する。

一方、 $\left|\frac{d_1}{(d_0 + d_2)}\right| = \left|\frac{-\text{tr}\mathbf{J}}{1+e^2}\right| < 1$ より、 $-1 < \frac{-\text{tr}\mathbf{J}}{1+e^2} < 1$ 。

$$0 < K \sin\varphi < \frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2} \quad (23)$$

両辺2乗し、式(7)を用いれば

$$\frac{1-e}{1+e} n\pi < K < \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 n^2 \pi^2 + \frac{4(1+e^2)^2}{(1+e)^4}} \quad (24)$$

式(21)、(24)の両者を比べると、Schurの定理の安定条件は、振動強度 K について下限が接線分岐、上限が周期倍分岐に対応している。また衝突位相角 $\sin\omega t_i = \sin\varphi$ については、式(23)より次の条件となる。

$$0 < \sin\varphi < \frac{2(1+e^2)}{K(1+e)^2} \quad (25)$$

これより、球が振動面と衝突するとき、その位置が正の場合のみ安定で、振動が持続することになる。

一方、 λ が複素根で $|\lambda| < 1$ の条件となる場合は、 $|\lambda_{1,2}| = \alpha \pm j\beta$ とすると、固有方程式より

$$\{\lambda - (\alpha + j\beta)\} \{\lambda + (\alpha - j\beta)\} = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

となり、式(14)と比べると

$$-2\alpha = -\text{tr}\mathbf{J}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \det\mathbf{J} = e^2$$

となる。従って、 $\lambda^2 - (\text{tr}\mathbf{J})\lambda + e^2 = 0$ であるから、複素根をもつ条件として、判別式が負でなければならない。

$$D = (\text{tr}\mathbf{J})^2 - 4e^2 < 0$$

$$\frac{(1-e)^2}{(1+e)^2} < K \sin\omega t_i < 1 \quad (26)$$

$K^2(1 - \cos^2 \omega t_i) < 1$ 、および式(7)より条件式(27)が導かれる。

$$\sqrt{\frac{(1-e)^4}{(1+e)^4} + \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2} n^2 \pi^2} < K < \sqrt{1 + \left(\frac{1-e}{1+e} n\pi\right)^2} \quad (27)$$

式(27)は、式(24)の範囲内の一部となっていることがわかる。

3. 数値計算例

最初に、基本周期衝突振動 ($n=1$) の安定範囲が反発係数 e によりどのように分布するかを図4(a)に示す。安定領域は式(20)の実線と式(19)の破線で囲まれた領域である。

この安定範囲から、反発係数が小さくなると衝突振動は振

動台の加速度レベルが大きくなる必要がある。しかしその e の減少につれて範囲は狭くなる事がわかる。球が完全弾性衝突 ($e=1$) する場合は $K=0$ 、すなわち台が振動しなくても周期衝突振動が可能であることを示している。この場合は衝突による運動エネルギーの損失がないので自明である。

図4(b)は、図4(a)に特性方程式の根が虚根となる K の範囲式(27)を重ねて示した。虚根となる K の範囲は安定域の内側に含まれ、反発係数が1に近いと、根は殆ど虚根であるが、0に近づくとこの範囲は狭くなり消失し、実根部分が増加することが確認されている。

$n=3$ までの安定域を虚根となる K の範囲も含めて示したのが図4(c)である。この安定範囲の分布を見ると反発係数が1に近づくと、1周期に1回衝突する(1,1)振動、2周期に1回衝突する(2,1)振動、3周期に1回衝突する(3,1)振動の周期解の安定領域が重なっている。実際の衝突振動では、どのような条件で3種類の振動が発生するかを、数値シミュレーションまたは振動実験で検証する必要がある。

球が振動台の n 周期に1回衝突する $(n, 1)$ 振動の安定領域の限界曲線は、加速度レベル K について特性方程式の根 $\lambda = \pm 1$ 、 $\lambda = -1$ についてそれぞれ下限と上限が求められた。ここでは、2次元写像の特性方程式

$$\lambda^2 + \left\{ (1+e)^2 K \sin \omega t_i - (1+e^2) \right\} \lambda + e^2 = 0$$

$$\sin \omega t_i = \sqrt{1 - \left(\frac{(1-e)n\pi}{(1+e)K} \right)^2}$$

の根の分布を e と n をパラメータとして、ゲイン K について Gauss 平面に表した。ゲイン K はスタート値を安定限界下限式(20)で求め、 $\Delta K = 0.001$ として安定限界上限式(19)を超える範囲について増加させている。

図5は反発係数 $e = 0.3$ 、 $n=1$ に対する特性根の軌跡である。また $e = 0.3$ 、 $n=2$ の場合も同様の結果となり、反発係数が同じであれば根の分布は n の値に関係なく一定であることが確認された。但し、ゲイン K の範囲は安定限界の上/下限界に依存する。これより $(n, 1)$ 振動の分岐形態は n と無関係であることがわかる。2次方程式の根は K が安定限界値付近では実数であり ($1.69 < K < 1.72$)、合流して虚根となり半径0.3の円周を回ったのち、再度合流して実数になり、1つの根は $(-1+0j)$ を通過して周期倍分岐する衝突振動となる。

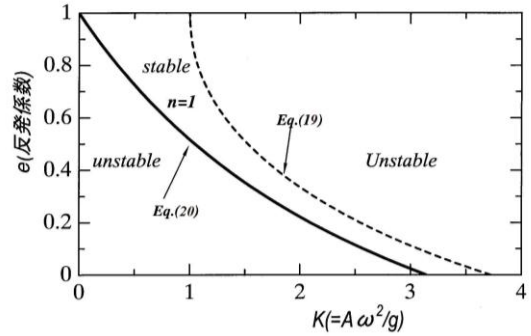
球が振動面上を衝突する $(n, 1)$ 振動では、写像の固有値 (特性根) について $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ となるので、安定領域では周期衝突振動解は完全安定不動点となり、実軸以外の単位円から出ないのでNeimark-Sacker分岐現象は生じない。

図6は球が振動面のどの位置で衝突するかを $\phi = \omega t_i$ として、衝突位相角を振動台加速度レベルについて示している。衝突位相角は式(7)で $\cos \omega t_i = \cos \phi$ として与え、関係式

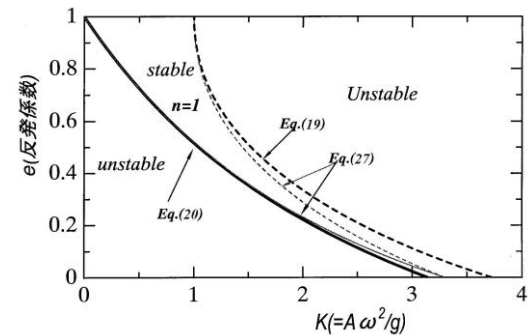
$$K = \left(\frac{1-e}{1+e} \right) \frac{n\pi}{\cos \phi}$$

によって計算表示した。 $(n, 1)$ 振動の ϕ についての安定限界は式(25)によって与えられるので、この式も同様に $\sin \phi$ を計算して (K, ϕ) の安定限界を求めた。図で表現する衝突位相角 ϕ は、0から始まる右曲りの各上昇曲線が、右下がりの安定境界線と交差する K の範囲である。この ϕ の上限界は n が増加すると減少する。球が振動面の負方向の位置で衝突すると

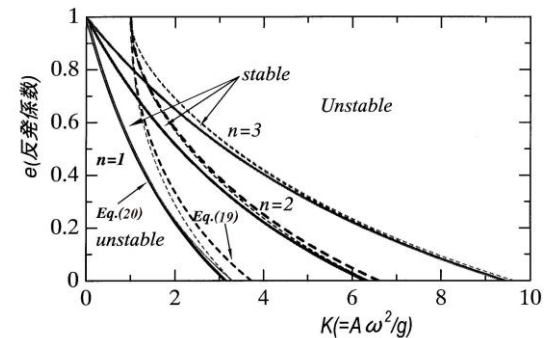
$\phi < 0$ となるので周期衝突は実現しない。



(a) $n=1$ 衝突振動の安定領域



(b) 特性根が虚根となる範囲



(c) $n=1, 2, 3$ の安定領域と虚根範囲

図4 衝突振動の安定領域

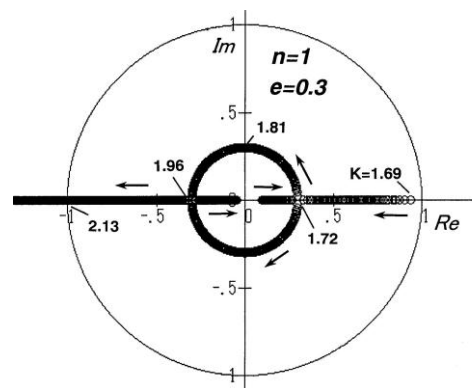


図5 $(n, 1)$ 振動・写像の特性根分布 ($K = 1.69 \sim \infty$)

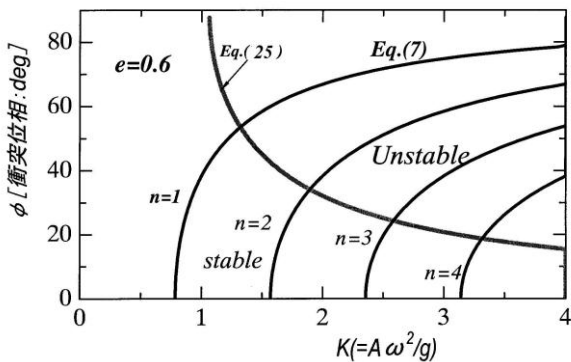


図6 衝突位相角と振動面加速度の関係

4. シミュレーションによる解析

ここでは、反発係数で衝突現象を記述する簡単なモデルを使って、振動面上の球の衝突振動を時刻歴応答とし計算機により実験する。まず解析による $(n, 1)$ 振動がどのような初期条件で実現するか、反発係数と振動面加速度レベルによる安定領域を参考にしてシミュレーションで調べ、安定範囲内での衝突位相の範囲を時系列振動波形により確認して、初期条件との関係を考察する。さらに周期倍分岐や接戦分岐により衝突振動にどのような変化が見られるかも検討し、カオスに至る不規則振動の発生状況などについても定性的な観察を行う。

4.1 シミュレーションの方法

重力の作用下で振動面と衝突を繰り返す球の運動は、自由落下運動を衝突時間ごとに接続すれば、時刻歴応答として計算可能になる。自由落下区間の球の運動方程式と垂直振動面(振幅 A , 角速度 ω) の運動は式(28)で与えられる。

$$m\ddot{x}_b = -mg, \quad x_t = A \sin \omega t \tag{28}$$

球の運動変位は衝突時刻 t_i , 衝突直後の速度を V_i とすれば、振動面の変位・速度も含めて式(29)となる。

$$\begin{aligned} x_b &= -g(t-t_i)^2/2 + V_i(t-t_i) + x_{bi} \\ \dot{x}_b &= -g(t-t_i) + V_i \end{aligned} \tag{29}$$

$$x_t = A \sin \omega t, \quad \dot{x}_t = A \omega \cos \omega t$$

ただし $x_{bi} = x_t = A \sin \omega t_i$ で、球と振動面が衝突するときの位置である。衝突時刻 t_i は球の振動面との相対変位 $x_b - x_t$ が0または負になる時刻を式(30)のように不等式で判定するか、またはニュートン法で計算して決定できる。

$$|x_b - x_t| \leq 0, \text{ あるいは } |t_{i,j} - t_{i,j+1}| = -\frac{f(t_j)}{df/dt} \leq \varepsilon \tag{30}$$

但し、 $f = x_b(t) - x_t(t)$, $\varepsilon = 10^{-5} \sim 10^{-6}$ である。衝突直後の速度 V_i は、球の衝突直前速度を V_{ib} , 振動面の衝突速度を U_{it} とすると、反発係数の式から式(31)で計算される。

$$V_i = (1+e)U_{it} - eV_{ib} \tag{31}$$

実際の計算では、球の運動は式(29)の代わりに、計算時間増分

$h(=\Delta t)$ として、反復計算式(32)を使用することができる。

$$x_{b,i+1} = x_{b,i} + h\dot{x}_{b,i} - gh^2/2, \quad \dot{x}_{b,i+1} = \dot{x}_{b,i} - gh \tag{32}$$

4.2 シミュレーション応答例

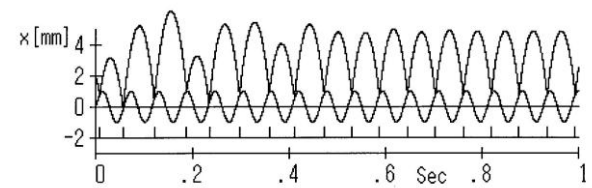
反発係数 e と周期倍数 n を指定して、式(24)で $(n, 1)$ 振動の振動面加速度レベル K の安定範囲を表示し、安定境界の内部・外部の K 値について衝突振動の計算機実験を行った。振動面の運動は、 $A = 1\text{mm}$ として、指定された K 値から振動数 $\omega = \sqrt{Kg/A}$ を算出し、球の初期変位は一定値 $x_b(0) = 2\text{mm}$ とし、初速度は $\dot{x}_b(0) = -200 \sim -1000\text{mm/s}$ を入力して初期条件による影響をチェックできるようにした。また衝突振動の形式を表現するために、振動面の n 周期ごとに k 種類の振動が現れる場合を (n, k) 振動と表記する。

初期条件が振動に及ぼす影響として、反発係数 $e = 0.6$ に対して、 $(1, 1)$ 振動の安定範囲 $(0.79 < k < 1.32)$ の内部 $k = 1.2$ について衝突振動を観察した結果の一例を図7(a), (b)に示す。計算は初期変位 2mm として、初速度を -80mm/s から -1000mm/s まで -20mm/s ごとに減少させて、 $(1, 1)$ 振動の収束状態を調べた。その結果、 $(1, 1)$ 振動に収束するのは、次の初速度の4区間であった。

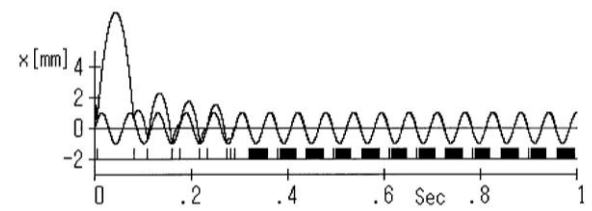
- (1) $-80 \sim -300\text{mm/s}$, (図7(a), -100mm/s)
- (2) $-520 \sim -540\text{mm/s}$
- (3) $-620 \sim -720\text{mm/s}$
- (4) $-960 \sim -980\text{mm/s}$

これら4区間以外では図7(b)のような衝突減衰が起り、振動面と付着・分離する振動となった。(1)~(4)の初速度の範囲では、計算開始後、最初の2回目の衝突位置が $\pm\pi/2$ の範囲にあり、図7(b)のように $\pi/2$ を超えるときは $(1, 1)$ 振動に収束しないことが分かった。

次に (n, k) 振動の発生について述べる。反発係数が大きい場合は、落下距離も増加する。このために初速度の違いにより球の振動面との衝突位置が確率的になり衝突パターンが多様化することになる。



(a) $\dot{x}_b(0) = -100\text{mm/s}$

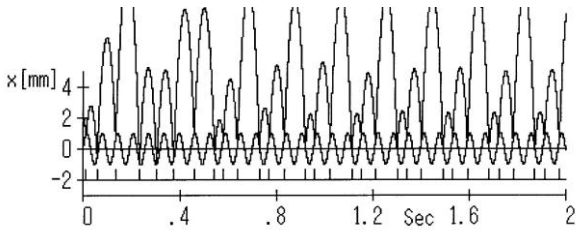


(b) $\dot{x}_b(0) = -320\text{mm/s}$

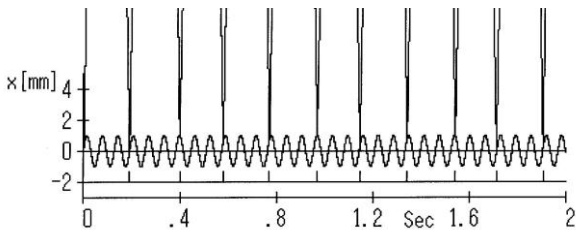
図7 $(1, 1)$ 振動に対する初期速度の影響

例えば、反発係数 $e = 0.9$ の場合に $K = 1$ を選び、初速度が $-20 \sim -150 \text{mm/s}$ では、図 8 (a) に示す収束の速い (3, 3) 振動、すなわち振動面の 3 周期に 3 種類の振動パターンが発生する。速度が $-180 \sim -220 \text{mm/s}$ の狭い範囲では、2 秒以降に収束する (1, 1) 振動となる。また、初速度が -500mm/s 付近では、振動面の 2 周期に 1 回衝突するが、3 つの衝突位相が異なるために安定な (6, 3) 振動が現れた。これは疑似 (2, 1) 振動と見なすことができる。さらに負方向の初速度が増えると、図 8 (b) の様な衝突の初めから収束する (3, 1) 振動が生じた。

図 4 (c) の反発係数—振動加速度の安定領域図では、 $E = 0.9$ 、 $K = 1$ の組み合わせに対して (1, 1), (2, 1), (3, 1) 振動が可能となる場合であり、数値実験により理論予測を証明することができた。さらに収束の速い (3, 3) 振動の存在も確認された。反発係数が低い場合は、 $(n, 1)$ 振動の安定域内では $(n, 2)$ 、 $(n, 3)$ 振動の発生は確認されない。なお、本計算機実験例は全て計算刻み $h = 1/2000 \text{sec}$ であり、 h の大きさによる衝突振動の変動は検討していないことを付記する。



(a) (3, 3) 振動, $\dot{x}_b(0) = -20 \text{mm/s}$



(b) (3, 1) 振動, $\dot{x}_b(0) = -800 \text{mm/s}$

図 8 (n, k) 振動と初期条件

($e = 0.9, K = 1.0, x_b(0) = 2 \text{mm}, A = 1 \text{mm}, f = 15.8 \text{Hz}$)

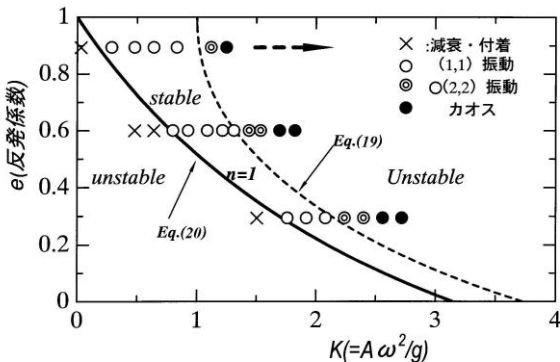


図 9 計算機実験と周期解の分布 ($n = 1$)

以上の結果から、数値実験では (n, k) 衝突振動を発生させるには、適当な初期条件 (初速度) 範囲が存在することが確認された。このことを考慮して反発係数 e と振動面加速度 K の安定領域 (図 4) について数値実験の衝突振動を対応させた。

図 9 は反発係数 $e = 0.3, 0.6, 0.9$ について、振動面加速度レベル K を安定限界線付近で変化させて (n, k) 振動の存在と分布を調べた結果である。計算方法としては、指定した K 値について (n, k) 振動となる初速度範囲を選んでいる。

安定領域の下限 ($K < 0.79$) では、球は衝突減衰後、振動面に付着する振動になり (図中 \times 印)、特性方程式の固有値が 1 となったあとの接線分岐では調和振動が発生している。安定領域内では、固有値は単位円内の実数と半径 0.6 の円上の虚数であり、安定な周期振動の (1, 1) 振動である (○印)。固有値が -1 ($K = 1.32$) になると、振動は周期倍分岐して (2, 2) 振動が発生している (◎印)。さらに $1.58 < K < 1.85$ の範囲では (2, 1) 振動が引き続き発生して (△印)、 $K > 1.85$ になると不規則な変動のカオス振動に至っている (●印)。

6. 結 言

重力場内で調和振動を行う振動面上を跳躍する質量の衝突振動について、 $(n, 1)$ 基本周期解を解析し、2 次元写像と分岐理論を適用して周期安定領域を求めた。さらに数値シミュレーションによって衝突振動の発生条件を調べ、解析結果と比較検討した。以上の結果をまとめると以下ようになる。

- 1 質量・衝突振動の周期解の安定性は 2 次元写像関数の Jacobian $[J]$ の特性方程式から分岐条件を与えることにより直接計算可能である。
- 安定な $(n, 1)$ 周期解は接線分岐と周期倍分岐の間で存在し、この領域は n の増大と、反発係数の減少とともに狭くなる。
- 特性方程式の根の分布は、反発係数が大きくなると安定限界に近い虚根が支配的となる。また根軌跡の分布・形状は反発係数値のみで決まり、周期倍数 n に依存しない。
- 数値シミュレーションにより、安定な周期解の領域でも、ある範囲の初期条件により $(n, 1)$ 振動が実現されることを確認した。
- 解析による周期解は数値シミュレーション結果と良好な一致が見られ、さらに一般的な (n, k) 振動も数値シミュレーションで確認され、周期倍分岐、カオスが観測された。

参考文献

- [1] F. Ehrich, Nonlinear Phenomena in Dynamic Response of Rotors in Anisotropic Mounting Systems, *Trans. ASME*, **117**, pp.154-161 (1995)
- [2] G. Wegener and R. Markert, Influence of contact and impacts on the dynamics of an elastic rotor with an elastic retainer bearing, *Proc. of the Euromech Colloquium*, pp. 89-98, (1998)
- [3] 吉村省二, スクリュー圧縮機ロータ系の衝突振動解析, *機論C編*, **61**(582), pp.501-506, (1995)
- [4] 河村賢ほか, 剛体架線・パンタグラフ系における衝突振動の基礎的検討, *機論C編*, **73**(728), pp.974-981, (2007)
- [5] 合原一幸, カオス学入門, 放送大学教育振興会, (2001)

(2010年10月15日 受理)