無限遠一様荷重を受ける異方性弾性体の解析
（多層楕円形介在物を有する場合）

種　　健・内田　　武・佐々木　徹*・浜野　浩幹**

Analysis for Anisotropic Medium under Uniform Stresses at Infinity
(In Case of a Medium which has Multilayered Elliptic Inclusions)

Takeshi TANE, Takeshi UCHIDA, Toru SASAKI and Hiroki HAMANO

Abstract

In this paper, approximate solution is indicated for anisotropic infinite medium which has multilayered elliptic inclusions. It is assumed that the medium are subjected to uniform loadings at infinity and that elastic principal axes of the medium are faced an arbitrary directions. Analyses are carried out using theory of two-dimensional elasticity, therefore general solutions are derived from complex stress functions. It is noted that improved formulation for anisotropic body are presented here because existing formulation derived S. G. Lekhnitskii has some problems in a computational process. Several results of calculation are indicated graphically.

Key words : Anisotropy, Multilayered Elliptic Inclusion, Theory of Two-Dimensional Elasticity, Complex Stress Function

１．緒　　言

空孔を有する等方性無限体の応力・変位場に関する研究において，Muskhelishvili の複素応力関数を利用した方法[1)]が用いられている．最近では，孔の周囲に形成される「Craze Zone」が注目され，この「応力緩和層」を楕円リングでモデル化（母材と異なる剛性を設定）することによって，検討を行う例が増えている．

また，リングの内側境界がスリットクラックである場合について，理論を拡張して取り扱う例もみられる．例えば，Warren[2)]はポリマー材料内部の介在物近傍の応力場を面内の無限遠一様荷重の下で求めた．また，Wu らは面内・面外せん断の無限遠一様荷重を受ける場合の解析解を求め，応力拡大係数を計算している．

また，同様の研究で母材のみ異方性体とした理論的研究も行われている．楕円孔を有する異方性体の研究は Lekhnitskii により解が示されており，異方性体内部に存在するクラックの破壊力学的研究には，この Lekhnitskii の古典的な解[3)]を応用した例が多い．

応力拡大係数の算定については，Sih らが内部にクラックを有する直交異方性材料に無限遠一様荷重が作用した場合の解析を行った[4)]．また，川久保らは等方性の楕円リングを有する 2 次元異方性体（$x-y$ 平面内でのみ弾性主軸の回転を許容）に無限遠一様荷重が負荷された場合の解析解を求めた[5)]．

緩和領域を任意層数に分割して検討した例もある．池田らは，面外せん断の無限遠一様荷重を受ける場合を対象に鏡像原理を用いた解析接続法により解を求めた[6)]．面外せん断問題は，面内問題に比べ数学的取り扱いが容易で，緩和領域を任意の多層領域に分割して多層化して検討されているが，面内問題についてこのような検討を行った例は見当たらない．

本研究では，図１に示す面内・面外せん断の無限遠一様荷重を受ける異方性体（任意の弾性主軸の回転を許容）の解析解を求め，数値計算例を示す．

* 長岡工業高等専門学校機械工学科
**松江工業高等専門学校名誉教授

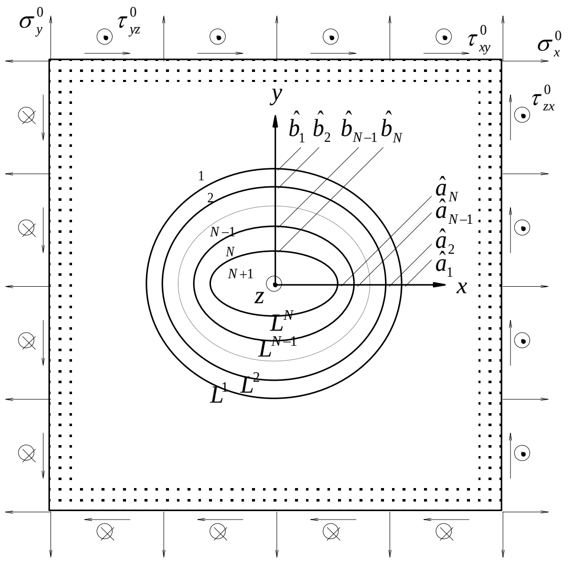

図１　解析モデル

２．基礎方程式

2.1　解析モデル

解析モデルは，無限の広がりをもつ異方性体とその内部に存在する多層の楕円形リングおよび中実の介在物からなる．図１に示すように，母材に 1，$(N-1)$ 層のリングに 2, 3,⋯, N 介在物を $N+1$ で表わす．

リングおよび介在物は，ともに等方性体と仮定し，それぞれの境界 L^j　(j=1, 2,⋯, N) において，合力ならびに変位の連続条件が成立すると仮定し，各々の領域に分解して取り扱うことにする．

2.2　基礎方程式

平面ひずみ的取り扱いの場合，異方性弾性体の構成方程式（応力－ひずみ関係）は，一般化 Hooke の法則により次式で表される．

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{24} & \beta_{25} & \beta_{26} \\ \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{44} & \beta_{45} & \beta_{46} \\ \beta_{15} & \beta_{25} & \beta_{45} & \beta_{55} & \beta_{56} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{46} & \beta_{56} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{3j}}{a_{33}}. \tag{2}$$

a_{ij} は弾性コンプライアンスで，直交異方性体の弾性主軸と図 1 の座標軸が一致する場合に限り，次式が成立する．

$$\left.\begin{aligned} & a_{11} = \frac{1}{E_{11}},\ a_{22} = \frac{1}{E_{12}},\ a_{33} = \frac{1}{E_{13}},\ a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{21}}{E_{12}}, \\ & a_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{31}}{E_{13}},\ a_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_{12}} = -\frac{\nu_{32}}{E_{13}},\ a_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \\ & a_{55} = \frac{1}{G_{31}},\ a_{66} = \frac{1}{G_{12}},\ \text{その他の}\ a_{ij} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

E_{11}, E_{12}, E_{13} は x, y, z 軸方向の縦弾性係数，G_{12}, G_{23}, G_{31} は $x-y, y-z, z-x$ 平面内の横弾性係数，ν_{ij} はポアソン比をそれぞれ表わす．

続いて，x, y, z 軸方向の力の釣合方程式は次式で表される．

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

式(4)を恒等的に満たす応力関数 F および ψ を Airy の応力関数，Prandtl 型の応力関数と呼び，各々の応力成分との関係は以下のように表示できる．

$$\left.\begin{aligned} & \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ & \tau_{zx} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

最後に，幾何式（ひずみ－変位関係）は次式によって与えられる．

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y},\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{6}$$

ここに，u, v, w は x, y, z 軸方向の変位である．

2.3 F, ψ に関する偏微分方程式と一般解

応力関数 F, ψ は，式(6)から導かれるひずみの適合方程式：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

を満足しなければならない．そこで，式(7)に式(1)および式(5)を代入することで，応力関数 F, ψ に関する連立偏微分方程式が導かれる．

$$L_4 F + L_3 \psi = 0,\ L_3 F + L_2 \psi = 0. \tag{8}$$

ここに，$L_j\ (j = 2,3,4)$ は j 階の微分演算子である [3)]．

式(8)の第 1 式に L_2 （L_3），第 2 式に L_3 （L_4）を作用させて互いの差を取ると，次式のように応力関数 F （ψ）に関する 6 階の偏微分方程式が得られる．

$$(L_4 L_2 - L_3^2) F = 0,\ (L_4 L_2 - L_3^2) \psi = 0. \tag{9}$$

式(9)の一般解は次式で与えられる．

$$F = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} F_k(z_k),\ \psi = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \lambda_k F_k'(z_k). \tag{10}$$

ここに，$F_k(z_k)$ は複素変数 $z_k = x + \mu_k y\ (k = 1,2,3)$ の解析関数であり，複素応力関数と呼ばれる．また，λ_3 に限り Lekhnitskii の与えた定数の逆数を採用する．

$$\lambda_3 = -\frac{l_3(\mu_3)}{l_2(\mu_3)} = -\frac{l_4(\mu_3)}{l_3(\mu_3)}. \tag{11}$$

$l_j(\mu_3)\ (j = 2,3,4)$ は，Lekhnitskii の著書 [3)] を参照のこと．

2.4 合力，応力および変位の一般式

これらを求めるために，新しい複素応力関数として次式を導入する．

$$\phi_k(z_k) = F_k'(z_k) \quad (k = 1,2,3). \tag{12}$$

式(12)から，異方性体の合力，応力および変位は以下の公式で求めることができる．

$$\left.\begin{aligned} & \pm P_x = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \mu_k \phi_k(z_k),\ \pm P_y = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \phi_k(z_k), \\ & \pm P_z = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \phi_k(z_k). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} & \sigma_x = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \mu_k^2 \phi_k'(z_k),\ \sigma_y = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \phi_k'(z_k), \\ & \tau_{xy} = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \mu_k \phi_k'(z_k), \\ & \tau_{zx} = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \mu_k \lambda_k \phi_k'(z_k),\ \tau_{yz} = -2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \phi_k'(z_k). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} & u = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \mu_k p_k \phi_k(z_k),\ v = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} q_k \phi_k(z_k), \\ & w = 2\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k \phi_k(z_k). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ここに，p_k, q_k および r_k は複素定数である．

$$\left.\begin{aligned} & p_k = \frac{1}{\mu_k}\{\beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k + \lambda_k(\beta_{15}\mu_k - \beta_{14})\}, \\ & q_k = \frac{1}{\mu_k}\{\beta_{12}\mu_k^2 + \beta_{22} - \beta_{26}\mu_k + \lambda_k(\beta_{25}\mu_k - \beta_{24})\}, \\ & r_k = \frac{1}{\mu_k}\{\beta_{14}\mu_k^2 + \beta_{24} - \beta_{46}\mu_k + \lambda_k(\beta_{45}\mu_k - \beta_{44})\}. \\ & \qquad\qquad (k = 1,2,3) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

3．解析解の導出

3.1 媒体，リングおよび介在物の複素応力関数

異方性体の楕円境界 L^1 に任意の外力 X_n^1, Y_n^1, Z_n^1 が作用する複素応力関数は，これらの外力を複素フーリエ級数展開して式(13)と比較することで，以下のように決定される．

$$\left.\begin{aligned} & \phi_k(z_k) = \frac{1}{\det A}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{1k}\bar{a}_n + A_{2k}\bar{b}_n + A_{3k}\bar{c}_n)\frac{1}{\zeta_k^n}, \\ & z_k = x + \mu_k y = R_k\left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k}\right) \quad (k = 1,2,3). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ここに，A_{ij} は以下の行列：

表 1　異方性体の解析手法の比較

	Lekhnitskii[(5)]	本論文
変位	$u, v, w.$	
応力	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}.$	
弾性コンプライアンス	a_{ij} (or $\beta_{ij} = a_{ij} - a_{i3}a_{j3}/a_{33}$).	
複素変数	$z_k = x + \mu_k y$. $(k = 1,2,3)$	
写像関数(楕円領域)	$z_k = R_k\left(\zeta_k + \dfrac{m_k}{\zeta_k}\right),\ R_k = \dfrac{1}{2}(\hat{a}_1 - i\mu_k\hat{b}_1),\ m_k = \dfrac{\hat{a}_1 + i\mu_k\hat{b}_1}{\hat{a}_1 - i\mu_k\hat{b}_1}.\ (k = 1,2,3)$	
応力関数	$F = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} F_k(z_k)$, $\psi = 2\,\mathrm{Re}\left[\lambda_1 F_1'(z_1) + \lambda_2 F_2'(z_2) + \dfrac{1}{\lambda_3} F_3'(z_3)\right].$	$F = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} F_k(z_k)$, $\psi = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \lambda_k F_k'(z_k).$
複素応力関数	$\phi_k(z_k) = F_k'(z_k)$, $(k = 1,2)$ $\phi_3(z_3) = \dfrac{1}{\lambda_3} F_3'(z_3).$	$\phi_k(z_k) = F_k'(z_k)$. $(k = 1,2,3)$
応力成分	$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}[\mu_1^2\phi_1'(z_1) + \mu_2^2\phi_2'(z_2) + \mu_3^2\lambda_3\phi_3'(z_3)]$, $\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2) + \lambda_3\phi_3'(z_3)]$, $\tau_{yz} = -2\,\mathrm{Re}[\lambda_1\phi_1'(z_1) + \lambda_2\phi_2'(z_2) + \phi_3'(z_3)]$, $\tau_{zx} = 2\,\mathrm{Re}[\mu_1\lambda_1\phi_1'(z_1) + \mu_2\lambda_2\phi_2'(z_2) + \mu_3\phi_3'(z_3)]$, $\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}[\mu_1\phi_1'(z_1) + \mu_2\phi_2'(z_2) + \mu_3\lambda_3\phi_3'(z_3)].$	$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k^2\phi_k'(z_k)$, $\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\phi_k'(z_k)$, $\tau_{yz} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\phi_k'(z_k)$, $\tau_{zx} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\lambda_k\phi_k'(z_k)$, $\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\phi_k'(z_k).$
変位成分	$u = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} p_k\phi_k(z_k)$, $v = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} q_k\phi_k(z_k)$, $w = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k\phi_k(z_k).$	$u = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} \mu_k p_k\phi_k(z_k)$, $v = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} q_k\phi_k(z_k)$, $w = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3} r_k\phi_k(z_k).$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

の余因子で，$A_{11} = \mu_2\lambda_3 - \mu_3\lambda_2$, $A_{12} = \mu_3\lambda_1 - \mu_1\lambda_3$, $\cdots$である．

式(17)は弾性主軸と座標軸が一致した直交異方性体には適用できない．これは，式(18)において $\lambda_k = 0\,(k = 1,2,3)$，つまり，式(17)の $\det A = 0$ となることによる．

そこで，各複素定数を便宜的に置き換えて，Lekhnitskii が厳密に 2 次元異方性体に対して導いた式[7)]に縮退させて解く．

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 = p_3 = q_3 = r_1 = r_2 = A_{31} = A_{32} = 0, \\ &\lambda_1 = 1,\ r_3 = \beta_{45} - \beta_{44}/\mu_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

μ_1, μ_2 は 4 次，μ_3 は 2 次の特性方程式を解くことによって決定される．

ただし，実用上は弾性主軸の面外傾斜角 α, β [3)]にゼロ近似の値を代入，計算すれば，十分な結果が得られる．

既往の異方性体の解析法である Lekhnitskii の手法と本論文の手法を比較したものを表 1 に示す. Lekhnitskii の欄の複素定数 p_k, q_k, r_k は，著書[3)]を参照のこと.

Lekhnitskii の手法では，偏微分方程式(9)の特性方程式の根 $\mu_k\ (k = 1,2,3)$ の組み合わせ方によって，異なる応力・変位分布が出力され，その中から正解を判別することに困難が伴っていた.

本論文の手法を用いれば，そのような恣意的な取り扱いを行わなくとも，正解を得ることができる（どのように特性根を組み合わせようが，唯一の結果を得ることができる).

なお，異方性体の一様応力場を表わす関数，等方性のリングおよび介在物に対する複素応力関数は，論文[8]に示されているので省略する．

3.2　連続条件

前述したように，異方性体，リング，介在物の各々の境界で合力および変位の連続条件：

$$\left.\begin{array}{l} P_x^j+P_x^{j+1}=0,\ P_y^j+P_y^{j+1}=0, \\ P_z^j+P_z^{j+1}=0, \\ u^j-u^{j+1}=0,\ v^j-v^{j+1}=0, \\ w^j-w^{j+1}=0. \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{on } L^j \\ (j=1,2,\cdots,N). \end{array} \tag{20}$$

が満たされると仮定する．ここに，上付添字は解析領域を表わしている．

式(20)に式(13)および式(15)の異方性体の合力，変位および論文[8]に示す等方性リング，介在物の合力，変位を適用することによって，各解析領域の複素応力関数に含まれる未定係数に関する無限連立 1 次方程式（永年方程式）が得られる．

なお，各領域の複素応力関数が無限級数に展開されているが，実用上は，十分に無視できる程度の誤差となる有限級数で解析すればよいと考えられる．

そこで本論文では，この有限級数を用いて得られる連立 1 次方程式を解くことで，複素応力関数の未定係数を定めた．級数打ち切りの目安は，式(20)の連続条件誤差を 0.1%以下に設定した．

4．数値計算例

4.1　解の収束性と連続条件

数値計算において，採用すべき級数の採用項数を検討した．一例として，$N=2$（つまり，異方性体，リング 1 層，中実介在物）の解析モデルに y 軸方向の垂直応力 σ_y^0 が作用した場合を示す．各層の物性値は，以下のとおりとする．

$$\left.\begin{array}{l} \text{異方性体}: e_{12}=E_{12}/E_{11}=0.20,\ e_{13}=E_{13}/E_{11}=1.00, \\ \qquad\qquad \nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{32}=0.30,\ \alpha=\gamma=45°,\ \beta=0°, \\ \text{リング}: e_2=E_2/E_{11}=0.10,\ \nu_2=0.30, \\ \text{介在物}: e_3=E_3/E_{11}=0.20,\ \nu_3=0.30. \end{array}\right\}$$

異方性体の横弾性率 G_{ij} は，よく用いられる仮定式[3]：

$$1/G_{ij}=1/E_i+1/E_j+2\nu_{ij}/E_i. \tag{21}$$

から計算，各境界 L^j $(j=1,2)$ の形状は以下のように設定する．

$$f_1=\hat{b}_1/\hat{a}_1=0.75,\ t=1.0-\hat{a}_2/\hat{a}_1\approx 0.17.$$

図２は，各境界 L^j $(j=1,2)$ における楕円柱座標系での応力成分 $\sigma_\xi^j, \tau_{z\xi}^j$ を縦軸，x 軸から反時計まわりに測った境界上の角度 θ を横軸にとって示したものである．

図中の N_c は，式(17)の複素応力関数を以下：

$$\left.\begin{array}{l} \phi_k(z_k)=\dfrac{1}{\det A}\displaystyle\sum_{n=1}^{2N_c+1}(A_{1k}\bar{a}_n+A_{2k}\bar{b}_n+A_{3k}\bar{c}_n)\dfrac{1}{\zeta_k^n}, \\ z_k=x+\mu_k y=R_k\left(\zeta_k+\dfrac{m_k}{\zeta_k}\right)\quad (k=1,2,3). \end{array}\right\} \tag{17'}$$

のように有限級数で近似した際のパラメータである．つまり，複素応力関数を $(2N_c+1)$ 項の級数和で近似したことを表わしている．

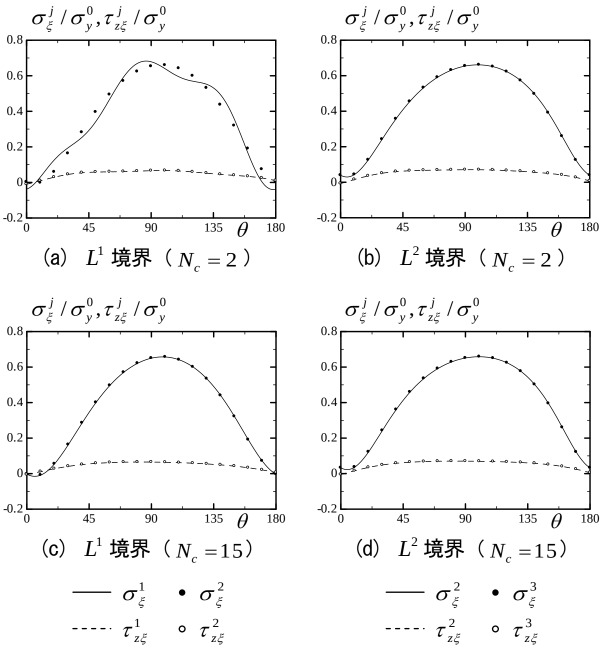

図２　複素応力関数の採用工数と連続条件

表２　中実介在物の偏平率と採用項数

f_N	0.25	0.50	0.75	1.00
N_c	75	30	15	10

図２(a)，(c)が L^1 境界，図２(b)，(d)が L^2 境界の応力を表わし，図２(a)，(b)は $N_c=2$，下側の図２(c)，(d)は $N_c=15$ の結果を表わす．

$N_c=2$ のとき，境界上の応力が重なっていない（とくに，L^1 境界上），つまり，応力の連続条件が満たされていないことを示している．これは，式(17)'に示す採用項数 $(2N_c+1)$ が小さいために起こる現象である．

一方，$N_c=15$ のとき，式(20)の連続条件誤差 0.1%以下になっており，連続条件が満たされていることを示している．

ところで，この採用項数は中実介在物の偏平率 $f_N=\hat{b}_N/\hat{a}_N$ によって変化するものの，各層の物性の組み合わせはほとんど無関係であることが知られている．検討の結果，中実介在物の偏平率に応じて表２の項数を採用しておけば，式(18)の連続条件誤差 0.1%以下の条件をクリアできることが確認されている．

4.2　リングの影響

本論文の成果を応用する例として，岩盤の初期地圧算定[9]に異方性を考慮することが挙げられる．図３に示されているように，初期地圧の算定は次の方法で行われる．

①岩盤にパイロットホール（円柱状のひずみゲージ内蔵型計測器の埋設孔）を削孔する．
②2 液混合型エポキシ樹脂などの接着剤によって，計測器をパイロットホール内に埋設・岩盤と一体化させる．
③計測器の周辺岩盤をボーリングし，コアの弾性回復量を計測器（ひずみゲージ）で測定する．
④ひずみゲージの値から，岩盤の初期地圧を算定する．

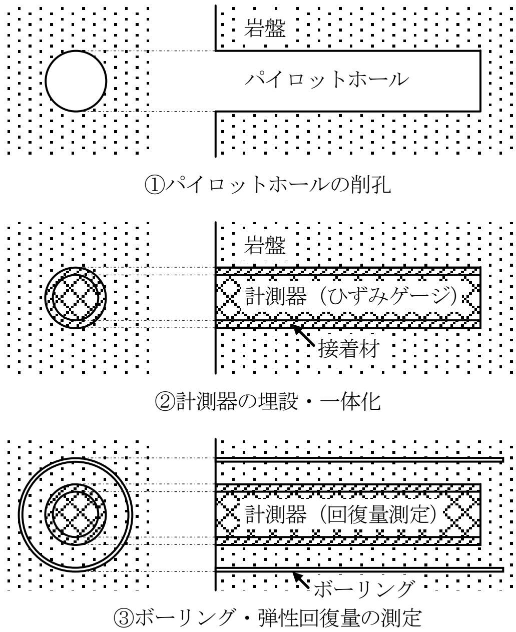

図３　初期地圧の測定手順

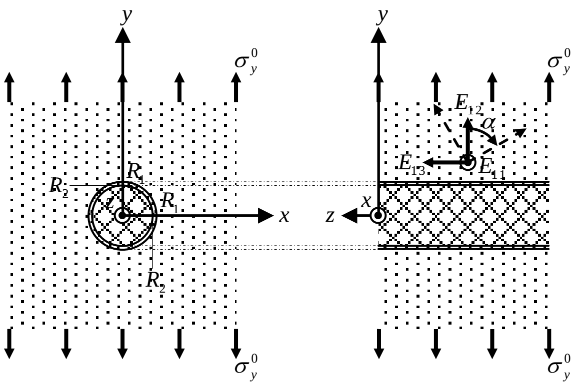

図４　弾性主軸の傾斜

地圧算定の際，接着剤と計測器の弾性定数は等しいとして，コアは岩盤と計測器の2層（$N=1$）からなるとされることが多いが，実際は（パイロットホールと計測器の間の）接着剤の層を含めた3層（$N=2$）として検討することが望ましいと考えられる．

そこで，本節では接着層（リング）の影響を検討する．岩盤は直交異方性を仮定，大島花崗岩として奈良らの測定結果[10]より式(3)の関係を用いて縦弾性係数，横弾性係数およびポアソン比を求めると以下の値になる．

$$
\text{岩　盤：}\left.\begin{array}{l}
E_{11}=56.3\mathrm{GPa}, E_{12}=51.9\mathrm{GPa}, E_{13}=34.0\mathrm{GPa},\\
G_{23}=19.6\mathrm{GPa}, G_{31}=20.3\mathrm{GPa}, G_{12}=23.9\mathrm{GPa},\\
\nu_{23}=0.191, \nu_{31}=0.181, \nu_{12}=0.170,
\end{array}\right\}
$$

また，接着層と計測器はプラスチックとして以下の弾性定数を用いる．

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{接着層：}E_2=2.4\mathrm{GPa}\ \text{or}\ 3.2\mathrm{GPa}, \nu_2=0.35,\\
\text{計測器：}E_3=3.2\mathrm{GPa}, \nu_3=0.35.
\end{array}\right\}
$$

接着層では，接着剤が硬化して間もない段階，十分時間が経過し計測器と同等の硬さになった段階を想定するために，2

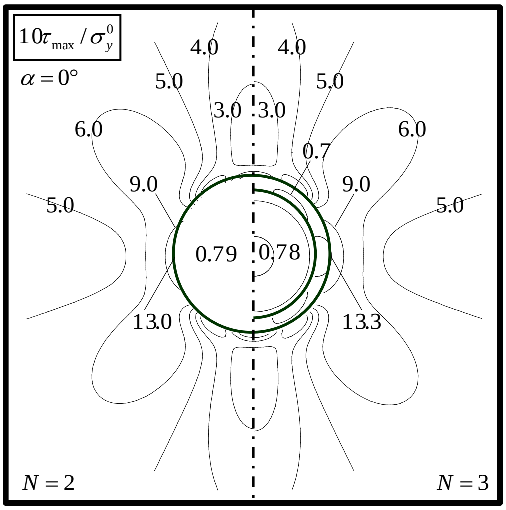

図５　σ_y^0 作用下の最大せん断応力等高線
（弾性主軸と座標軸が一致している場合）

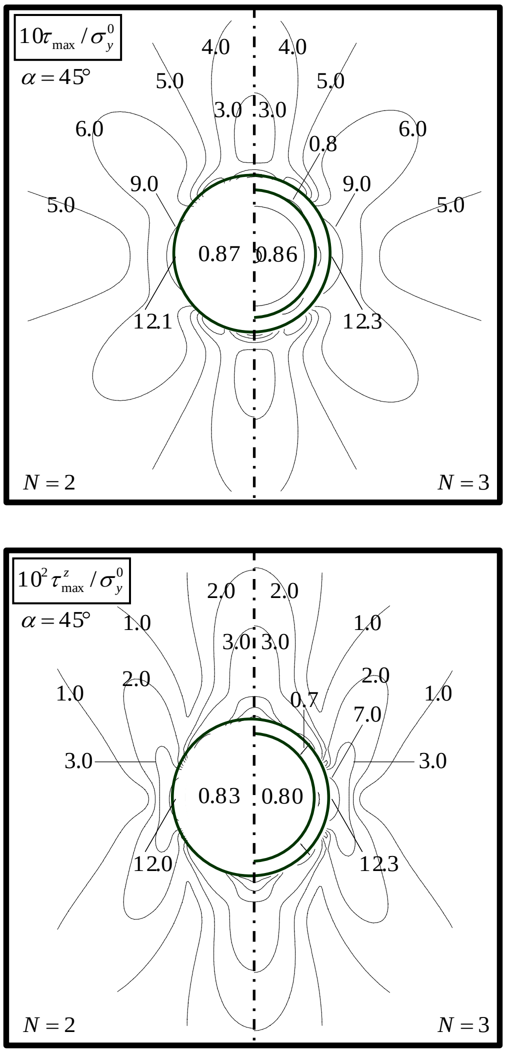

図６　σ_y^0 作用下の最大せん断応力等高線
（弾性主軸と座標軸が一致していない場合）

種類の縦弾性係数を設定した．前者は岩盤，接着層，計測器の 3 層問題，後者は岩盤，計測器の 2 層問題となる．

パイロットホールは，図 1 の $a_1 = b_1 = R_1 = 11\mathrm{mm}$，計測器は $a_2 = b_2 = R_2 = 9\mathrm{mm}$ の円形とし，岩盤の無限遠方より初期地圧 σ_y^0 が作用する場合を対象とする（図 4）．

図 5，図 6 は，以上の条件で面内および面外の最大せん断応力：

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}\ ,\ \tau_{\max}^z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2}\ . \qquad (19)$$

の分布図を表わしている．

このうち，図 5 は弾性主軸 E_{11}, E_{12}, E_{13} がそれぞれ図 4 の座標軸 x, y, z と一致した場合の分布図で，左側が 2 層問題，右側が 3 層問題の結果を表わしている．

弾性主軸と座標軸が一致しているとき，面内問題と面外せん断問題は連成しない．したがって，$\tau_{\max}^z = 0$ となるためこの図は示していない．

図 5 において左側の 2 層問題のとき，計測器内の応力分布は一様になっていることが分かり，Eshelby によって示された結果[11)]に一致している．

右側の 3 層問題のとき，もはや計測器内の応力分布は一様にはならないが，変動はごくわずかである．

続いて図 6 は，図 4 の弾性主軸 E_{12}, E_{13} が x 軸（E_{11} 軸）を中心に $\alpha = 45°$ 回転し，破線の矢印の方向を向いているときの分布図を表わしている．

このとき，荷重 σ_y^0 の作用方向と弾性主軸の方向が一致していないため，面内問題と面外せん断問題は連成することになる．したがって，図 6 の上側に $\tau_{\max}$，下側に $\tau_{\max}^z$ の分布図を示した．

図 6 も左側に 2 層問題の分布が示されており，計測器内の応力分布は一様，Eshelby の結果に一致している．

3 層問題のとき，計測器内にわずかながら応力の分布が見られるものの，その変動はごくわずかである．

以上を総合すると，接着剤と計測器の弾性定数が等しくない（3 層問題）としても，計測器内のひずみゲージが検出する弾性回復量の変動はごくわずかであると推定され，初期地圧測定上の致命的な誤差の発生要因にならないであろうことが予想される．

5．結　　言

本論文では，無限遠一様荷重を受ける異方性弾性体について，多層楕円形介在物を有する場合を対象に解を求め，数値計算例を示した

これまで異方性体の解析は Lekhnitskii の方法[3)]を用いて行われてきたが，特性根 $\mu_k\ (k = 1, 2, 3)$ と解析結果の関係をその都度，恣意的に調べなければならなかった．

そこで，本論文においてこの点を改善した新たな解析法を示し，解の導出に用いた．この新しい理論は，異方性体の弾性主軸が面外傾斜していない場合は適用できないが，その場合は式(19)のように複素定数を便宜的に置き換えることにより対処できる．

また，本論文で対象とした解析モデルにおいて，多層リングの物性を同一とすれば，論文[8)]の結果に帰着する．また，異方性体を面外傾斜のない場合に限定，面外せん断荷重のみを作用させた場合，鏡像原理を用いた解析接続法による結果[6)]に一致することが確認されている．

数値計算例では，面内垂直応力 σ_y^0 が作用している場合の結果を示したが，その他の荷重が作用する場合についても何ら困難なく解析でき，変形状態を求めることも可能である．

本論文では，Craze Zone に関する検討はとくに示さなかったが，異方性体中に存在するクラック先端近傍の応力拡大係数や応力・変位場の計算を行うことが今後の課題である．

参考文献

1) Muskhelishvili, N. I., Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff Groningen Ltd., 718pp., 1953.
2) Warren, W. E., Stress and Displacement Fields at the Tip of a Craze Containing a Crack, Polymer Vol.24, pp.814-819, 1984.
3) Lekhnitskii, S. G., Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day Inc., 404pp. , 1963.
4) Sih, G. C., Paris, G. C. and Irvin, G. R., On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies, Int. J. Fract., Mech., 1, pp.189-203, 1965.
5) 川久保昌平，平島健一，結城則行，面内・面外せん断の無限遠一様荷重を受ける異方性弾性体，日本機械学会論文集（A 編），64-619，pp.638-643，1998.
6) 池田然之，平島健一，木村清和，面外せん断荷重下における多層の等方性リング介在物を有する異方性弾性体の解析解とその数値計算例，日本機械学会論文集（A 編），63-613，pp.2018-2024，1997.
7) Lekhnitskii S. G., Anisotropic Plates, Gordon and Breach Science Publishers, 534pp., 1958.
8) 種　　健，平島健一，浜野浩幹，層状楕円形介在物を有する異方性弾性体の解析および応力拡大係数の計算，日本機械学会論文集（A 編），70-698，pp.1412-1419，2004.
9) 木村清和，平島健一，黒瀬雅詞，菊地慎二，小型埋設ひずみ計を用いた初期応力測定法の開発，トンネルと地下，34-7，pp.573-581，2003.
10) 奈良禎太，金子勝比古，花崗岩の異方弾性定数の評価法に関する研究，資源と素材，Vol.119，pp.396-402，2003.
11) Eshelby, D., The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems, Proc. Roy. Soc., A241, pp.376-396, 1963.

（2010 年 10 月 15 日　受理）